

## Übungen - Blatt 4

(Abgabe der Lösungen bis Montag, den 30.05.2011, um 12.00 Uhr)

**Aufgabe 1)** Gegeben ist ein normaler Endomorphismus von  $\mathbb{C}^3$ , dessen Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasis  $A$  ist.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1+i}{4} & \frac{1-3i}{4} & \frac{i}{2} \\ \frac{-1+3i}{4} & \frac{-1+i}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$$

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$ .

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie eine unitäre Matrix  $U$ , sodass  $U^*AU$  eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge die Eigenwerte von  $A$  sind.

**Aufgabe 2)** Es sei  $V$  ein unitärer Vektorraum. Zeigen Sie:

a) (2 Punkte) Ein Endomorphismus  $\phi : V \rightarrow V$  ist eine orthogonale Projektion genau dann, wenn gilt:  $\phi^* = \phi$  und alle Eigenwerte von  $\phi$  sind 0 oder 1.

b) (2 Punkte) Sind  $\phi$  und  $\psi : V \rightarrow V$  normale Endomorphismen mit  $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ , dann gibt es eine Orthonormalbasis aus gemeinsamen Eigenvektoren von  $\phi$  und  $\psi$ .

**Aufgabe 3)** (4 Punkte)

Für welche  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta \in \mathbb{R}$  ist die folgende Matrix orthonormiert<sup>1</sup>?

$$M = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & \alpha & 4 & 3\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & \beta & \gamma & \delta \\ 4 & 3\sqrt{3} & \epsilon & 4\sqrt{3} \\ \zeta & \eta & \theta & 3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 4)** (4 Punkte)

Es sei  $V = \mathbb{C}^3$  versehen mit dem Standardskalarprodukt. Desweiteren seien

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + (\sqrt{2} + 1)i \\ -1 + (\sqrt{2} - 1)i \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ und } z = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Abbildung  $\phi$  sei eine Isometrie von  $V$ , die  $[a]$  und  $[a, b]$  als Unterräume invariant lässt, sowie  $c$  auf  $y$  abbildet. Bestimmen Sie  $\phi(z)$ .

<sup>1</sup>Für Matrizen sind die Begriffe „orthonormiert“ und „orthogonal“ Synonyme.

**Aufgabe 5) Zusatzaufgabe zum Entspannen a) (2 Zusatzpunkte)** Wie oft stehen an einem Tag Stunden- und Minutenzeiger senkrecht aufeinander?

b) Finden Sie rechte Winkel an der abgebildeten Uhr, welche laut Anzeige „rund mit rechten Winkeln“ sei.



**Tangente.** Rund mit rechten Winkeln verkörpert diese Uhr Glashütter Manufaktur und feinstes „Made in Germany“. Form und Qualität sind zeitlos, dauerhaft, vielfach preisgekrönt – eine Uhr, die uns hilft, wir selbst zu sein. Mit automatischem Aufzug heißt sie Tangomat. Designklassiker und viel mehr: [www.tangente.com](http://www.tangente.com)