Übungen - Blatt 3

(Abgabe der Lösungen am Montag, den 16.05.2011, um 12.00 Uhr)

Aufgabe 1) ***(4 Punkte)*** *Für welche* $t \in \mathbb{R}$ *ist die Matrix* $A(t)$ *positiv definit?*

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 & \frac{1}{4} \\ 2-3t & t & 1 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2) ***(4 Punkte)*** *Sei* V *ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum,* $U \subset V$ *ein Untervektorraum und* Π *ein Endomorphismus von* V*. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:*

(i) Π *ist die orthogonale Projektion auf* U*.*

(ii) Es gilt $\mathrm{Bild}(\Pi) = \mathrm{U}, \Pi^2 = \Pi$ *und* $\|\Pi(x)\| \leq \|x\|$ *für alle* $x \in V$*.*

(iii) Es gilt $\mathrm{Bild}(\Pi) = \mathrm{U}, \Pi^2 = \Pi$ *und* $\|\Pi(x) - \Pi(y)\| \leq \|x - y\|$ *für alle* $x, y \in V$*.*

Hinweis: Für die Implikation (iii) $\Rightarrow$ *(i) benötigt man ein Folgen-Argument.*

Aufgabe 3) *Sei* V *ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit* $\dim V < \infty$ *und* ϕ *ein Endomorphismus von* V*. Zeigen Sie:*

a) (2 Punkte) $\ker(\phi^*) = (\mathrm{Bild}(\phi))^\perp$, $\mathrm{Bild}(\phi^*) = (\ker(\phi))^\perp$.

b) (2 Punkte) $W \subset V$ *ist unter* φ *invariant genau dann wenn* $W^\perp$ *unter* φ^* *invariant ist.*

Aufgabe 4) *Sei* U *der von den Vektoren*

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untervektorraum des $\mathbb{R}^5$*.*

a) (2 Punkte) *Berechnen Sie* $U^\perp$*.*

b) (2 Punkte) *Sei* Π *die orthogonale Projektion auf* U*. Berechnen Sie* $\Pi(c)$ *für*

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5) (Wird im Tutorium besprochen) *Seien U, V, W drei unitäre Vektorräume. Weiterhin seien $f, g : V \to W$ sowie $h : U \to V$ lineare Abbildungen und $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie folgende Rechenregeln für die adjungierten Abbildungen:*

a) $(f+g)^* = f^* + g^*$.

b) $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$.

c) $(f \circ h)^* = h^* \circ f^* e$.

Aufgabe 6) (Wird im Tutorium besprochen) *Sei U der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Für fest gewählte, paarweise verschiedene $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ definieren wir ein Skalarprodukt auf U durch*

$$< f, g >= f(\alpha) \cdot g(\alpha) + f'(\beta) \cdot g'(\beta) + f''(\gamma) \cdot g''(\gamma).$$

Berehnen Sie die Projektion von $1 + x^2$ auf den von 1 und x erzeugten Untervektorraum.