Übungen - Blatt 2

(Abgabe der Lösungen bis Montag, den 02.05.2011, um 12.00 Uhr)

Aufgabe 1) (4 Punkte)

Zeigen Sie: Auf einem normierten Vektorraum V gibt es ein Skalarprodukt $\langle\, , \rangle$ mit $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ genau dann, wenn die Norm die Parallelogrammidentität

$$||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2$$

erfüllt.

Aufgabe 2)

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass durch $||z||_1 := \sum_{k=1}^{n} |z_k|$, bzw. durch $||z||_\infty := \max_{k=1\dots n} |z_k|$ für alle $z = (z_1, \dots, z_n)^T \in \mathbb{C}^n$ jeweils eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{C}^n$ definiert ist, und überprüfen Sie, ob die Normen die Parallelogrammidentität erfüllen.

b) (2 Punkte) Es sei V der Vektorraum aller reellen Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Durch

$$||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}||_{l_2} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist auf V eine Norm gegeben. Prüfen Sie, ob die Parallelogrammidentität erfüllt ist und geben Sie gegebenenfalls ein Skalarprodukt $\langle\, , \rangle$ mit $||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}||_{l_2} = \sqrt{\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle}$ an.

Aufgabe 3)

a) (2 Punkte) Auf dem $\mathbb{R}^4$ sei ein Skalarprodukt gegeben durch die Fundamentalmatrix M (bzgl. Standardbasis). Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums V. Dabei seien

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right].$$

b) (2 Punkte) Gegeben sei auf dem Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens 2 mit reellen Koeffizienten, also dem Raum $V = [1, t, t^2] \subset \mathbb{R}[t]$ das Skalarprodukt

$$s(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)\cdot g(t)\, dt \text{ für alle } f, g \in V.$$

Bestimmen Sie ausgehend von der Basis $\{1, t, t^2\}$ eine Orthonormalbasis von V.

Aufgabe 4) (4 Punkte)

Auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V seien zwei Skalarprodukte F_1 und F_2 gegeben, sodass für alle $x \in V$ und $y \in V$ gilt: $F_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow F_2(x,y) = 0$

Zeigen Sie, dass dann ein $\alpha > 0$ existiert mit $F_1(x,y) = \alpha \cdot F_2(x,y)$.