Übungen - Blatt 1

(Abgabe der Lösungen am Montag, den 18.04.2011, um 12.00 Uhr)

Aufgabe 1) ***(Jeweils 1 Punkt)*** *Überprüfen Sie jeweils, ob es sich bei den angegebenen Funktionen um ein Skalarprodukt handelt:*

a) $F_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)) \mapsto \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2$.

b) $F_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3)) \mapsto \alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2 - \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_3$.

c) $H_1 : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)) \mapsto \alpha_1\overline{\beta_1} + (4 + 2i) \cdot \alpha_2\overline{\beta_2}$.

d) $H_2 : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $((\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2)) \mapsto 5\alpha_1\overline{\beta_1} + \alpha_2\overline{\beta_2} + (2 + i)\alpha_1\overline{\beta_1} + (2 - i)\alpha_2\overline{\beta_1}$.

Aufgabe 2) **a) (1 Punkt)** *Sei $V = \mathcal{C}([0, 1])$ die Menge aller auf dem Intervall $[0, 1]$ stetigen reellwertigen Funktionen. Zeigen Sie, dass V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.*

b) (2 Punkte) *Zeigen Sie, dass durch*

$$< f, g >:= \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

c) (1 Punkt) *Bestimmen Sie für $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = x$ das Skalarprodukt $< f, g >$.*

Aufgabe 3) **(4 Punkte)** *Auf $\mathbb{R}^3$ sei (bezüglich der Standardbasis) ein Skalarpodukt gegeben durch:*

$$F((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3)) = 8\alpha_1\beta_1 - 4\alpha_1\beta_3 + 4\alpha_2\beta_2 - 4\beta_1\alpha_3 + 5\beta_3\alpha_3$$

Finden Sie eine Basis a_1, a_2, a_3 von $\mathbb{R}^3$, so dass die Fundamentalmatrix des Skalarprodukts bezüglich dieser Basis Diagonalgestalt hat.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass F tatsächlich ein Skalaprodukt ist.

Aufgabe 4) **(4 Punkte)** *Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2; \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass durch*

$$F(x, y) = x^t My$$

genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird, wenn M folgende drei Eigenschaften erfüllt: $b = c$, $\det(M) > 0$ und $\mathrm{tr(M) := a + d} > 0$.

Aufgabe 5) (Wird im Tutorium besprochen) *Zeigen Sie folgende Regeln für Matrizen* $A, B \in \mathrm{Mat(n; K)}$*:*

a) $(AB)^T = B^T A^T$ $(K = \mathbb{R})$.

b) $(A + cB)^T = A^T + cB^T$ für $c \in \mathbb{R}$ $(K = \mathbb{R})$.

c) AA^T ist symmetrisch $(K = \mathbb{R})$.

d) $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$ $(K = \mathbb{C})$.

e) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ falls A invertierbar ist $(K = \mathbb{C})$.

Wichtige Links:

Hompage der Vorlesung:
http://www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/ag/personen/lehnert_ralf/Geom_SS11/index.html
OLAT:
https://olat.server.uni-frankfurt.de