Seminar Fuchs'sche Differentialgleichungen

Vortrag 8 Die Schwarzsche Abbildung

Patrick Bloß

17. Juni 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

1.1 Definition

Auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$v \sim w \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^\times : w = \lambda v$$

Die Äquivalenzklassen entsprechen den eindimensionalen Untervektorräumen von $\mathbb{C}^2$. Die Menge dieser Äquivalenzklassen wird mit $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ bezeichnet. Schreibe $(z_0 : z_1)$ für die Äquivalenzklasse von (z_0, z_1). $\mathbb{P}^1$ heißt *projektive Gerade* oder *eindimensionaler projektiver Raum* über $\mathbb{C}$ und ist ein erstes Beispiel für eine Riemannsche Fläche.
$\mathbb{P}^1$ sei mit der Quotiententopologie versehen, die von der Abbildung:

$$\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{P}^1, \qquad (z_0, z_1) \to (z_0 : z_1)$$

kommt.

1.2 Lemma

Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \to \hat{\mathbb{C}}, \qquad (z_0 : z_1) \mapsto \begin{cases} \frac{z_0}{z_1}, & \text{falls } z_1 \neq 0 \\ \infty, & \text{falls } z_1 = 0 \end{cases}$$

ist wohldefiniert und ein Homöomorphismus. Es gilt also $\mathbb{P}^1 \cong \hat{\mathbb{C}}$.

Beweis: Die Unabhängigkeit von der Wahl des Repräsentanten in der Äquivalenzklasse ist klar. Außerdem ist die Abbildung

$$\psi : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1, \qquad \lambda \mapsto \begin{cases} (\lambda : 1), & \text{falls } \lambda \neq \infty \\ (1 : 0), & \text{falls } \lambda = \infty \end{cases}$$

eine Umkehrabbildung. Es bleibt zu zeigen, dass φ und ψ stetig sind. Sei $U \subseteq \bar{\mathbb{C}}$ offen und $\infty \notin U$. Es gilt $\varphi^{-1}(U)$ ist genau dann offen, wenn $\pi^{-1}\varphi^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist. Da $\infty \notin U$ liegt das Urbild unter $\varphi \circ \pi$ in $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ und $\varphi \circ \pi$ ist die Abbildung $(z_0, z_1) \mapsto \frac{z_0}{z_1}$, welche stetig auf $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist. Also ist φ stetig auf U
Bleibt die Stetigkeit von φ bei ∞. Ist U offen und $\infty \in U$, so gilt $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \subseteq U$ für $R > 0$. Das Urbild dieser Menge unter $\varphi \circ \pi$ ist

$$\{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} : |z_0| - R|z_1| > 0\}.$$

Diese Menge ist offen und und enthält $\{(z_0, 0) | z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$. Folglich ist φ auch bei ∞ stetig. Ähnlich zeigt man die Stetigkeit von ψ.

1.3 Definition (Schwarzsche Abbildung) [Yo2, S. 67-68]

Sei $z \in \mathbb{H}$. Die Abbildung $f_0 : z \mapsto (f_{01}(z) : f_{02}(z))$ heißt Schwarzsche Abbildung, wobei

$$f_{01} = F(a,b,c;z) \quad \text{und} \quad f_{02} = z^{1-c}F(a+1-c, b+1-c, 2-c; z)$$

Lösungen der HGDE um 0 sind. Man kann analog natürlich auch f_1 und f_∞ definieren mit

$$\begin{aligned} f_{11} &= F(a,b,a+b+1-c;1-z), \\ f_{12} &= (1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b, c+1-a-b; 1-z) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_{\infty 1} &= \left(-\frac{1}{z}\right)^a F(a,b,a+b+1-c;1-z), \\ f_{12} &= \left(-\frac{1}{z}\right)^a F(c-a, c-b, c+1-a-b; 1-z) \end{aligned}$$

Erinnerung: Die HGDE ist die Differenzialgleichung

$$u'' + \frac{c-(a+b+1)z}{z(1-z)}u' - \frac{ab}{z(1-z)}u = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Setze $p(z) = \frac{c-(a+b+1)z}{z(1-z)}$ und $q(z) = -\frac{ab}{z(1-z)}$

1.4 Proposition

Seien f_1 und f_2 zwei linear unabhängige Lösungen der HGDE auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ und $f_2(z) \neq 0 \ \forall z \in D$. Dann ist $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(z)$ wohldefiniert und nicht 0 für alle $z \in D$.

Beweis: Es gilt $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = -\frac{1}{f_2^2}W$, wobei

$$W = f_1 f_2' - f_2 f_1' = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix}$$

die Wronskideterminante von f_1 und f_2 ist, für die gilt

$$\begin{aligned} W' &= f_1 f_2'' - f_2 f_1'' \\ &= f_1(-pf_2' - qf_2) - f_2(-pf_1' - qf_1) \\ &= -pf_1 f_2' + pf_2 f_1' \\ &= -p(f_1 f_2' - f_2 f_1') \\ &= -pW \end{aligned}$$

Löst man diese Differenzialgleichung erhält man

$$W = c\exp(\int^{z} -p(t)\mathrm{d}t)$$

mit $c \in \mathbb{C}$. Da f_1 und f_2 linear unabhängig sind, ist $W \not\equiv 0$, also muss auch $c \neq 0$ gelten. Da p in D holomorph ist, ist auch W holomorph. Weil $\mathrm{Bild}(\exp) = \mathbb{C}^\times$ gilt $W(z) \neq 0 \ \forall z \in D$. $\square$

Wir wollen im Folgenden untersuchen, was unter der Schwarzschen Abbildung mit der oberen Halbebene passiert. Dazu benötigen wir einige Hilfsmittel.

2 Möbiustransformationen

2.1 Definition (Möbiustransformation) [Con, S. 47]

Eine lineare gebrochen-lineare Abbildung der Form $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \ a,b,c,d \in \mathbb{C}$ heißt *Möbiustransformation*, wenn a,b,c und d die Bedingung $ad - bc \neq 0$ erfüllen.

Im folgenden betrachten wir stets Möbiustransformationen. Es ist zu beachten, dass für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)}$$

Die Koeffizienten a,b,c und d sind also nicht eindeutig.

2.2 Proposition

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Die lineare Abbildung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ induziert eine projektive Transformation $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1, \ (x:y) \mapsto (ax+by : cx+dy)$. Transportiert man diese mit φ zu einer Abbildung $\varphi \circ A \circ \varphi^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ so erhält man die Möbiustransformation

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

Insbesondere bedeutet das: Sind f_1, f_2 zwei linear unabhängige Lösungen der HGDE auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ und g_1, g_2 zwei weitere solcher Lösungen, so erhalten wir zwei Abbildungen $z \mapsto (f_1(z) : f_2(z))$ und $z \mapsto (g_1(z) : g_2(z))$. Der Lösungsraum der HGDE ist 2-dimensional, also existiert eine Basiswechselmatrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ mit

$$A\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

Die projektiven Tupel $(f_1 : f_2), (g_1 : g_2)$ gehen also durch Möbiustransformationen auseinander hervor.

2.3 Lemma [Con, S. 48]

Zu paarweise verschiedenen $z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ existiert genau eine Möbiustransformation die z_2 auf 1, z_3 auf 0 und z_4 auf ∞ schickt, nämlich

$$S(z) = \left(\frac{z - z_3}{z - z_4}\right) \Big/ \left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right)$$

Beweis: Für alle Fixpunkte einer Möbiustransformation muss gelten

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

ausmultiplizieren liefert

$$0 = cz^2 + (d - a)z - b$$

Eine Möbiustransformation kann also maximal zwei Fixpunkte besitzen. Sei nun S eine Möbiustransformation und seien $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ paarweise verschiedene Punkte mit $\alpha = S(a), \beta = S(b)$ und $\gamma = S(c)$. Angenommen T ist eine weitere Abbildung mit dieser Eigenschaft. Dann hat $T^{-1}S$ die drei paarweise verschiedenen Fixpunkte a, b und c und es folgt, dass $T^{-1}S = I$ die Identität ist, also $S = T$.

2.4 Definition (Doppelverhältnis) [Con, S. 48]

Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$, dann ist $(z_1, z_2, z_3, z_4) := S(z_1)$ das Bild von z_1 unter der obigen Möbiustransformation. Man bezeichnet (z_1, z_2, z_3, z_4) als das *Doppelverhältnis* von z_1, z_2, z_3 und z_4.

2.5 Proposition [Con, S. 48]

Seien z_2, z_3, z_4 paarweise verschiedene Punkte in $\hat{\mathbb{C}}$ und T eine beliebige Möbiustransformation. Dann gilt

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4)$$

für jeden Punkt $z_1 \in \hat{\mathbb{C}}$.

Beweis: Sei $S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ und $M = ST^{-1}$, dann ist $M(T(z_2)) = 1$, $M(T(z_3)) = 0$ und $M(T(z_4)) = \infty$, also ist $M(z) = (z, Tz_2, Tz_3, Tz_4)\ \forall z \in \hat{\mathbb{C}}$. Für $z = T(z_1)$ folgt nun

$$(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = (M \circ T)(z_1) = (S \circ T^{-1} \circ T)(z_1) = S(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

$\square$

2.6 Satz [Con, S. 48-49]

Eine Möbiustransformation bildet verallgemeinerte Kreise wieder auf verallgemeinerte Kreise ab.

Anmerkung: Ein Kreis ist durch drei Punkte eindeutig definiert. Sind diese Punkte kollinear, so entspricht die entstehende Gerade in $\mathbb{C}$ einem Kreis durch ∞ in $\hat{\mathbb{C}}$.
Um diesen Satz zu beweisen benötigen wir zunächst folgende Proposition:

2.6.1 Proposition [Con, S. 49]

Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden. Dann gilt.

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \iff z_1, z_2, z_3 \text{ und } z_4 \text{ liegen auf einem Kreis.}$$

Beweis: Sei $S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$. Dann ist $S^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid (z, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}\}$. Daher reicht es zu zeigen, dass das Bild von $\mathbb{R}_\infty$ unter einer Möbiustransformation ein Kreis ist. Sei nun $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ eine beliebige Möbiustransformation. Ist $z = x \in \mathbb{R}$ und $\omega = S^{-1}(x) \neq \infty$, so impliziert $x = S\omega$, dass $S(\omega) = \overline{S(\omega)}$, also

$$\frac{a\omega + b}{c\omega + d} = \frac{\bar{a}\bar{\omega} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{\omega} + \bar{d}}$$

Ausmultiplizieren liefert

$$(a\bar{c} - \bar{a}c)|\omega|^2 + (a\bar{d} - \bar{b}c)\omega + (b\bar{c} - d\bar{a})\bar{\omega} + (b\bar{d} - \bar{b}d) = 0 \tag{1}$$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $a\bar{c} \in \mathbb{R} \implies a\bar{c} - \bar{a}c = 0$. Setze $\alpha := 2(a\bar{d} - \bar{b}c)$, $\beta := i(b\bar{d} - \bar{b}d)$
   Multipliziert man nun (1) mit i, erhält man:

   $$\begin{aligned} 0 &= (a\bar{d} - \bar{b}c)i\omega + (b\bar{c} - d\bar{a})i\bar{\omega} + (b\bar{d} - \bar{b}d)i \\ &= (i\frac{\alpha\omega}{2} - i\frac{\bar{\alpha}\bar{\omega}}{2}) + \beta \\ &= -\frac{1}{2i}(\alpha\omega - \overline{\alpha\omega}) + \beta \end{aligned}$$

   Multipliziert man beide Seiten mit -1 erhält man

   $$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2i}(\alpha\omega - \overline{\alpha\omega}) - \beta \\ &= \mathrm{Im}(\alpha\omega) - \beta \end{aligned}$$

   Da β reell ist ergibt sich

   $$0 = \mathrm{Im}(\alpha\omega - \beta) \tag{2}$$

   ω liegt also auf der Geraden (2), die für festes α und β gegeben ist.

2. Fall: $a\bar{c} \notin \mathbb{R}$ Dann wird (1) durch Multiplikation mit $(a\bar{c} - \bar{a}c)^{-1}$ zu

$$\begin{aligned} 0 &= |\omega|^2 + \bar{\gamma}\omega + \gamma\bar{\omega} - \delta \\ &= |\omega|^2 + \bar{\gamma}\omega + \gamma\bar{\omega} + |\gamma|^2 - |\gamma|^2 - \delta \\ &= \omega\bar{\omega} + \bar{\gamma}\omega + \gamma\bar{\omega} + \gamma\bar{\gamma} - |\gamma|^2 - \delta \\ &= (\omega + \gamma)(\bar{\omega} + \bar{\gamma}) - |\gamma|^2 - \delta \\ &= |\omega + \gamma|^2 - |\gamma|^2 - \delta \end{aligned}$$

Mit $\lambda = (|\gamma|^2 + \delta)^{1/2} = \left|\frac{a\bar{d} - \bar{b}c}{\bar{a}c - a\bar{c}}\right| > 0$ erhält man nun

$$|\omega + \gamma| = \lambda \tag{3}$$

γ und λ sind von x unabhängig und (3) ist eine Kreisgleichung.

$\square$

Beweis von Satz 2.6:

Sei Γ ein beliebiger Kreis in $\hat{\mathbb{C}}$, sei S eine beliebige Möbiustransformation, seien z_2, z_3, z_4 paarweise verschiedene Punkte auf Γ und sei $\omega_j = S(z_j)$ für $j = 2, 3, 4$. Nach Proposition 2.5 gilt nun

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (S(z), \omega_2, \omega_3, \omega_4)$$

Nach der vorangegangen Proposition 2.6.1 ist die linke Seite reell, wenn $z \in \Gamma$, also muss dann auch die rechte Seite reell sein, was bedeutet $S(z)$ liegt für alle $z \in \Gamma$ auf einem Kreis Γ'. $\square$

3 Winkel

3.1 Definition (Winkel zwischen zwei Wegen) [Con, S. 45-46]

Sei $\varepsilon > 0$ und seien $\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ zwei glatte, d.h. unendlich oft differenzierbare, Wege mit $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$ und $\gamma_1'(t_1) \neq 0,\ \gamma_2'(t_2) \neq 0$. Definiere den *Winkel zwischen den Wegen* γ_1 und γ_2 bei z_0 als

$$\arg\gamma_2'(t_2) - \arg\gamma_1'(t_1)$$

3.2 Satz (konforme Abbildungen) [Con, S. 46]

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Wenn $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch (also holomorph) ist, dann erhält f die Winkel jedes Punktes $z_0 \in G$, an dem $f'(z_0) \neq 0$.

4 Das Schwarzsche Dreieck

4.1 Proposition [Yo2, S. 68]

Wenn

$$|1-c|, |c-a-b|, |a-b| < 1$$

bildet die Schwarzsche Abbildung die obere Halbebene $\mathbb{H}$ bijektiv auf ein Dreieck, das durch drei Kreisbögen - gegeben durch das Bild von $(\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, \infty)$ unter f - begrenzt ist, ab.

Beweis: Sei $f_0 : z \mapsto f_{01}(z) : f_{02}(z)$ die Schwarzsche Abbildung. Nach Proposition 1.4 ist $W = f_{01}' f_{02} - f_{01} f_{02}' \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{H}$, also sind f_{01} und f_{02} nie gleichzeitig 0 und somit ist f_0 wohldefiniert. Zunächst brauchen wir folgende Proposition.

4.1.1 Proposition

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $|1-c|, |c-a-b|, |a-b| < 1$. Dann besitzt f_0 eine stetige Fortsetzung auf $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und das Bild von $f_0 : \overline{\mathbb{H}} \to \hat{\mathbb{C}}$ ist ein Kreisbogendreieck T mit den Winkeln

$$\pi|1-c|, \ \pi|c-a-b|, \ \pi|a-b|.$$

Für den Beweis benötigen wir zunächst folgendes Lemma:

4.1.1.1 Lemma Sei $\varepsilon > 0$ und $B = B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{C}$. Sei außerdem $h : B \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $h(0) \neq 0$ und $c \in (0,1)$. Betrachte

$$\Phi : B \cap \{\mathrm{Im}(z) > 0\} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto z^c h(z)$$

Dann ist Φ stetig nach $B \cap \{\mathrm{Im} \geq 0\}$ fortsetzbar. Der Winkel, der von den Bildern der Segmente $(-\varepsilon, 0)$ und $[0, \varepsilon)$ unter Φ bei $\Phi(0)$ eingeschlossen wird ist gleich $c\pi$.

Beweis: Zunächst ist die Funktion sogar auf $B^- := B \backslash i \cdot \mathbb{R}_{\leq 0}$ wohldefiniert, denn da B^- sternförmig ist, können wir beliebige Wurzeln ziehen aus Funktionen, die auf B^- keine Nullstellen haben. Außerdem lässt sich Φ stetig nach 0 fortsetzen, weil $c > 0$. Somit existiert auch eine Fortsetzung nach $B \cap \{\mathrm{Im} \geq 0\}$.
Φ hat in 0 keine stetige Ableitung, also müssen wir die Winkelberechnung anders vornehmen. Sei $\delta > 0$ und $\gamma_1, \gamma_2 : [0, \delta) \to \mathbb{C}$ zwei Wege mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$, die auf $(0, \delta)$ stetig differenzierbar sind und für die die rechtsseitigen Grenzwerte $\lim_{t \to 0^+} \frac{\gamma_i'(t)}{|\gamma_i'(t)|}$, $i \in \{1, 2\}$ existieren. Dann definierten wir den Winkel als:

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2, 0) := \arg \lim_{t \to 0^+} \frac{\gamma_2'(t)}{|\gamma_2'(t)|} - \arg \lim_{t \to 0^+} \frac{\gamma_1'(t)}{|\gamma_1'(t)|}$$

Sind γ_1, γ_2 auf ganz $(-\delta, \delta)$ stetig, so erhält man die ursprüngliche Definition zurück. Berechne den Winkel $\angle(\Phi \circ \gamma_1, \Phi \circ \gamma_2, \Phi(0))$ für $\gamma_1(t) = t, \gamma_2(t) = -t$ bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\arg \lim_{t \to 0^+} \frac{\Phi(\gamma_1)(t)'}{|\Phi(\gamma_1)(t)'|} \\
=\ &\arg \lim_{t \to 0^+} \frac{(t^c h(t))'}{|(t^c h(t))'|} \\
=\ &\arg \lim_{t \to 0^+} \frac{(ct^{c-1}h(t) + t^c h'(t)}{|(ct^{c-1}h(t) + t^c h'(t)|} \\
=\ &\arg \lim_{t \to 0^+} \frac{t^{c-1}(ch(t) + th'(t))}{|t^{c-1}(ch(t) + th'(t))|} \\
=\ &\arg \lim_{t \to 0^+} \frac{(ch(t) + th'(t))}{|(ch(t) + th'(t))|} \\
=\ &\arg h(0)
\end{aligned}$$

Und wegen $\Phi(\gamma_2)(t) = -t^c h(-t) = \exp(c \log -t) h(-t) = t^c \exp(ci\pi) h(-t)$ ist

$$\begin{aligned}
&\arg \lim_{t \to 0^+} \frac{\Phi(\gamma_2)(t)'}{|\Phi(\gamma_2)(t)'|} \\
=\ &\arg \lim_{t \to 0^+} \frac{e^{ic\pi}(ch(-t) - th'(-t))}{|e^{ic\pi}(ch(-t) - th'(-t))|} \\
=\ &\arg(h(0)e^{ic\pi}) \\
=\ &\arg h(0) + c\pi
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$\angle(\Phi(\gamma_1), \Phi(\gamma_2), \Phi(0)) = c\pi$$

□

Beweis von Proposition 4.1.1:

Die Abbildung f_0 ist sogar auf $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, 0] \cup [1, \infty))$ definiert und auf $(0, 1)$ stetig fortsetzbar (siehe [Yo2, S. 66]). Da $f_0 = M^{10} f_1$, bzw. $f_0 = M^{\infty 0} f_\infty$ mit Matrizen $M^{10} f_1, M^{\infty 0} f_\infty \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gilt und f_1, f_2 stetige Fortsetzungen nach $(1, \infty)$ bzw. $(-\infty, 0)$ haben, müssen wir lediglich die stetige Fortsetzbarkeit in die Punkte $0, 1$ und ∞ überprüfen. Wir tun dies exemplarisch für 0, die anderen Punkte funktionieren analog. Außerdem betrachten wir den Fall, dass keiner der Werte $|1 - c|, |c - a - b|, |a - b|$ gleich 0 ist. In diesem Fall sähen die Lösungen der HGDE anders aus.
Es ist

$$f_{01} = F(a, b, c; z), \;\; f_{02} = z^{1-c} F(a + 1 - c, b + 1 - c, 2 - c; z),$$

wobei $F(a, b, c; z)$ die hypergeometrische Reihe ist. Insbesondere gilt nun also $F(a, b, c; 0) = 1$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \notin \{0, -1, -2, \ldots\}$

Sei zunächst $1 - c < 0$, also $c - 1 \in (0, 1)$. Dann ist $\varphi(f_0) = \frac{f_{01}}{f_{02}} = z^{c-1}h(z)$ mit $h(z) = \frac{F(a,b,c;z)}{F(a+1-c,b+1-c,2-c;z)}$. Insbesondere ist $h(0) \neq 0$. Mit Lemma 4.1.1.1 folgt nun, dass f_0 eine stetige Fortsetzung nach 0 hat und der Winkel, der bei 0 eingeschlossen wird gerade $\pi(c - 1) = \pi|1 - c|$ ist. Falls $1 - c > 0$ ist, betrachtet man $(z \mapsto \frac{1}{z}) \circ \varphi \circ f_0$.
Weiterhin sind die Funktionen f_0, f_1 und f_∞ reellwertig auf $(0, 1), (1, \infty)$ bzw. $(-\infty, 0)$ und bilden diese Intervalle deswegen wieder auf reelle Intervalle ab. Da sie durch Möbiustransformationen ineinander übergehen, und diese kreistreu sind, folgt, dass die Bilder dieser Intervallle Kreisbögen sind. Analog für die anderen Intervalle.

4.1.2 Lemma

Es ist noch zu zeigen, dass sich die Bilder der Segmente $(0, 1), (1, \infty)$ und $(-\infty, 0)$ unter f_0 nicht schneiden. Anders gesagt ist das Bild von $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ unter f_0 eine *Jordankurve*, d.h. durch einen Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ parametrisierbar, der injektiv auf $(0, 1)$ ist.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass es eine Möbiustransformation A gibt, sodass die Bilder der an z_0 angrenzenden Segmente unter $A \circ f_0$ nicht nur Kreisbögen, sondern sogar Geradensegmente sind und sich deshalb nicht schneiden können. Betrachte zunächst $z_0 = 0$. $f([0, 1])$ ist ein reelles Intervall mit Anfangspunkt 0, da alle Bestandteile von hypergeometrischen Reihen reell sind. Da f_0 eine stetige Fortsetzung nach $(-\infty, 0)$ hat und diese zumindest in $\mathbb{H} \cap B_1(0)$ gegeben ist durch $z \mapsto z^{c-1}F(a, b, c; z)/F(a + 1 - c, b + 1 - c, 2 - c; z)$ (im Fall $c - 1 > 0$), gilt. dass $f_0((-1, 0))$ ein Geradensegment ist, denn obige Abbildung ist auf $(0, 1)$ reellwertig und die Funktion

$$z \mapsto z^{c-1} = \exp((c - 1)(\log |z| + i \arg(z)))$$

bildet den Halbkreis $B_1(0) \cap \{\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ auf den Kreissektor

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \arg(z) \in [0, (c - 1)\pi]\}$$

also insbesondere das Intervall $(-1, 0)$ auf das Geradensegment von 0 nach $\exp(2\pi i(c - 1))$ ab. Die Lösungen der HGDE bei 1 und ∞ sind von der gleichen Bauart und f_1, f_∞ gehen durch Möbiustransformationen aus f_0 hervor. Also folgt die Behauptung auch für $z_0 = 1, \infty$. $\square$

Es ist nun klar, dass die Punkte $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ auf den Rand eines Kreisbogendreiecks T abgebildet werden. ∂T zerschneidet nun $\mathbb{P}^1$ in zwei Zusammenhangskomponenten T und $\mathbb{P}^1 \setminus T$. Da $\mathbb{H}$ zusammenhängend ist, liegt $f_0(\mathbb{H})$ auch ganz in einer der beiden Zusammenhangskomponenten. Betrachte die Verbindungsstrecke von $x \in (0, 1)$ zu $z_0 \in \mathbb{H} \cap B_1(0)$. Der Winkel zwischen der reellen Achse und dieser Verbindungsstrecke liegt in $(0, \pi)$. Da f_0 bei x holomorph ist, bleibt nach Satz 3.2 dieser Winkel erhalten und das Bild der Verbindungsstrecke von x nach z_0

unter f_0 ist ein Weg in T. Das Bild von $\mathbb{H}$ liegt also ganz in T.

Das folgende Lemma zeigt nun, dass tatsächlich $f_0(\overline{\mathbb{H}}) = T$ gilt.

4.1.3 Lemma

Für alle $z \in \partial\overline{\mathbb{H}}$ gibt es $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, sodass $f_0(B_\varepsilon(z) \cap \overline{\mathbb{H}}) \supseteq B_\delta(f_0(z)) \cap T$ gilt.

Beweis: Für z aus dem Inneren eines der Intervalle $(-\infty, 0], [0, 1], [1, \infty)$ ist die Behauptung klar, denn dort ist f_0 lokal biholomorph. Die Behauptung muss noch für $0, 1$ und ∞ gezeigt werden. Wie oben gezeigt bildet eine Abbildung der Form

$$z \mapsto z^\alpha = \exp(\alpha(\log|z| + i\arg(z)))$$

wieder den Halbkreis $B \cap \{\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ auf den Kreissektor

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \arg(z) \in [0, \alpha\pi]\}$$

ab. Eine Umgebung von 0 in $B \cap \{\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ wird also wieder auf eine Umgebung von 0 im Bild abgebildet. ε und δ anzugeben würde allerdings einigen Aufwand bedeuten. $\square$

Aus diesem Lemma folgt nun, dass $f_0(\overline{\mathbb{H}})$ offen in T ist. Da $f_0(\overline{\mathbb{H}})$ aber auch das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist, ist $f_0(\overline{\mathbb{H}})$ wieder kompakt also insbesondere abgeschlossen in T. Da T zusammenhängend ist, sind die einzigen Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, $\emptyset$ und T selbst. Also muss gelten:

$$f_0(\overline{\mathbb{H}}) = T$$

$\square$

4.2 Proposition

Unter den Vorraussetzungen von Proposition 4.1.1 ($|1-c|, |c-a-b|, |a-b| < 1$) ist die Schwarzsche Abbildung f_0 ein Homöomorphismus von $\overline{\mathbb{H}} \to T$.

Für den Beweis benötigen wir zunächst einige Definitionen.

4.2.1 Definition

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines Topologischen Raums X heißt *diskret*, wenn jeder Punkt $a \in A$ eine Umgebung V besitzt, sodass $V \cap A = \emptyset$ gilt.

4.2.2 Definition

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen.

a) f heißt offen, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist.

b) Seien X, Y zusätzlich metrische Räume. f heißt *eigentlich*, wenn für jede kompakte Menge $K \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(K) \subseteq X$ kompakt ist.

c) f heißt *topologische Überlagerung*, falls jeder Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung $U \subseteq Y$ besitzt, sodass

$$f^{-1}(U) = \dot{\bigcup_{i \in I}} V_i$$

die disjunkte Vereinigung von offenen Mengen $V_i \subseteq X$ ist und $f|_{V_i} : V_i \to U$ ein Homöomorphismus ist.

Außerdem brauchen wir die Homotopieliftungseigenschaften von Abbildungen und die Tatsache, dass topologische Überlagerungen diese besitzen (siehe Vortrag 5).

4.2.3 Definition

Seien X, Y, Z topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung.

a) Ein *Lift* einer stetigen Abbildung $g : Z \to Y$ entlang f ist eine stetige Abbildung $\tilde{g} : Z \to X$ mit $g = f \circ \tilde{g}$.

b) Eine *Homotopie* zwischen stetigen Abbildungen $g_0, g_1 : X \to Y$ ist eine stetige Abbildung $g : X \times [0,1] \to Y,\ (x,t) \mapsto g_t(x)$,

c) f hat die *Homotopieliftungseigenschaft*, wenn für jede Homotopie g und jeden Lift $\hat{g}_0$ von g_0 entlang f gilt, dass es eine eindeutig bestimmte Homotopie $\tilde{g}$ mit $\tilde{g}_0 = \hat{g}_0$ gibt, die ein Lift von g ist.

Zeige nun, dass f eine eigentliche Abbildung und damit auch eine topologische Überlagerung ist. Wegen $\pi_1(T) = 0$ ist diese dann ein Homöomorphismus.

4.2.4 Lemma

Seien $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ nichtleere Gebiete und $f : D_1 \to D_2$ eine eigentliche, surjektive, holomorphe Abbildung, sodass f' keine Nullstelle in D_1 hat. Dann ist f eine topologische Überlagerung.

Beweis: Da f' keine Nullstelle hat, ist f in jedem Punkt von D_1 lokal biholomorph und $f^{-1}(\{z\})$ ist für jedes z diskret. Nach Voraussetzung ist f eigentlich, also ist $f^{-1}(\{z\})$ auch kompakt und damit endlich. Außerdem ist die Menge wegen der Surjektivität von f nicht leer. Es ist also

$$f^{-1}(\{z\}) = \{w_1,\ \dots\ w_m\} \quad \text{mit} \quad m \geq 1.$$

Für jedes der w_i gibt es nun eine Umgebung W_i, sodass $f|_{W_i}$ biholomorph also insbesondere ein Homöomorphismus ist. Man kann diese Umgebungen natürlich so klein wählen, dass $W_i \cap W_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Die Menge $U := \bigcap_{i=1}^m f(W_i)$ ist eine offene Umgebung von z, denn f ist als nicht konstante holomorphe Abbildung offen. Setze nun

$$V_i := W_i \cap f^{-1}(U),$$

dann ist U eine offene Umgebung wie in der Definition topologischer Überlagerungen gefordert.

$\square$

4.2.5 Lemma

Seien X, Y wegzusammenhängende topologische Räume und $x \in X$ und $y = f(x)$. Ist $f : X \to Y$ eine topologische Überlagerung und ist $\pi_1(Y, y) = \{0\}$, dann ist f eine Homöomorphismus.

Beweis: Die Stetigkeit und Offenheit von f folgen unmittelbar aus der Definition einer topologischen Überlagerung. Die Surjektivität folgt, weil Y wegzusammenhängend ist und man Wege entlang f liften kann. Es bleibt also lediglich die Injektivität zu zeigen.

Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2) =: z$ und sei $\tilde{\gamma} : [0, 1] \to X$ eine Weg von x_1 nach x_2. Dann ist $\gamma = f \circ \tilde{\gamma}$ eine geschlossener Weg in Y mit Anfangspunkt z. Da nach Voraussetzung $\pi_1(Y, z) = \pi_1(Y, y) = \{0\}$ ist, gibt es eine Homotopie $\gamma_t : [0, 1] \times [0, 1] \to Y$ von $\gamma_0 = \gamma$ zum konstanten Weg γ_1 mit $\gamma_1(t) = z$. Da f die Homotopieliftungseigenschaft hat, erhält man auch einen Lift $\tilde{\gamma}_t$ der Homotopie von $\tilde{\gamma}_0 = \tilde{\gamma}$. Da γ_1 konstant ist, muss auch $\tilde{\gamma}_1$ konstant sein und es folgt $x_1 = x_2$. f ist also injektiv.

$\square$

Beweis von Proposition 4.2:

Wir überprüfen zunächst die Voraussetzungen der vorangegangenen Lemmata für $f_0 : \mathbb{H} \to T^\circ$, wobei T° das Innere von T bezeichnet. Nach 1.4 ist f_0' in keinem Punkt von $\mathbb{H}$ gleich 0. Sei nun $K \subseteq T^\circ$ kompakt, dann ist auch $K \subseteq T$ kompakt und damit abgeschlossen. f_0 besitzt eine stetige Fortsetzung zu $f_0 : \overline{\mathbb{H}} \to T$, also ist $f_0^{-1}(K)$ abgeschlossen in $\mathbb{H}$ und damit in $\mathbb{P}^1$. $\mathbb{P}^1$ ist kompakt, denn mittels stereographischer Projektion ist $\mathbb{P}^1$ homöomorph zur 2-Sphäre $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ im $\mathbb{R}^3$. Diese ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Damit ist dann auch $f_0^{-1}(K)$ kompakt und f_0 ist eigentlich. Da $f_0(\mathbb{H}) = T^\circ$ ist f_0 surjektiv. Die Voraussetzungen von Lemma 4.2.4 sind erfüllt und f_0 ist eine topologische Überlagerung. Da $\pi_1(T^\circ) = \{0\}$ gilt, folgt aus dem vorangegangen Lemma 4.2.5 nun, dass f_0 somit ein Homöomorphismus ist.

$\square$

5 Spiegelungen

5.1 Definition (Spiegelung bezüglich Kreisen) [Con, S. 50-51]

Sei Γ ein Kreis durch die Punkte z_2, z_3 und z_4. Die Punkte z und z^* heißen *symmetrisch bezüglich* Γ, wenn

$$(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)}.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Punkte z_2, z_3, z_4. Die Abbildung $z \mapsto z^*$ ist die Spiegelung von z an Γ.
z ist zu sich selbst symmetrisch bezüglich Γ genau dann, wenn $z \in \Gamma$, denn dann ist nach Proposition 2.6.1 (z, z_2, z_3, z_4) reell und damit gilt die obige Gleichung.
Wir wollen nun untersuchen, was es für z und z^* bedeutet symmetrisch zu sein.
Betrachte zunächst den Fall, dass Γ eine Gerade ist. Setze also $z_4 = \infty$. Dann ergibt sich

$$\frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3}$$

Das bedeutet, dass $|z^* - z_3| = |z - z_3|$ und da z_3 auf Γ beliebig gewählt werden kann, sind z und z^* äquidistant zu allen Punkten auf Γ. Außerdem ist

$$\operatorname{Im}\frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = \operatorname{Im}\frac{\bar{z} - \bar{z}_3}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3} = -\operatorname{Im}\frac{z - z_3}{z_2 - z_3}$$

z und z^* liegen also in verschiedenen Halbebenen (vorausgesetzt z liegt nicht schon auf Γ). Die Verbindungsgerade durch z und z^* ist also senkrecht zu Γ, was der Intuition von Symmetrie bezüglich einer Geraden entspricht.

Sei nun $\Gamma = \{z : |z - a| = R\}$ für $0 < R < \infty$ ein Kreis um a mit Radius R und seien $z_2, z_3, z_4 \in \Gamma$. Mit der obigen Definition von Symmetrie und mehrmaliger Anwendung von Proposition 2.5 erhält man

$$\begin{aligned}
(z^*, z_2, z_3, z_4) &= \overline{(z, z_2, z_3, z_4)} \\
&= \overline{(z - a, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a)} \\
&= \left(\bar{z} - \bar{a}, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a}, \frac{R^2}{z_4 - a}\right) \\
&= \left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a\right) \\
&= \left(\frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, z_2, z_3, z_4\right)
\end{aligned}$$

Also ist $z^* = a + R^2(\bar{z} - \bar{a})^{-1}$, oder umgeformt $(z^* - a)(\bar{z} - \bar{a}) = R^2$. Daraus folgt

$$\frac{z^* - a}{z - a} = \frac{R^2}{|z - a|^2} > 0$$

und z^* liegt auf der Geraden durch a und z. Mit $|z - a||z^* - a| = R^2$ kann man nun z^* bestimmen.

5.2 Satz (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) [Jä1, S. 25]

Sei $U \subset \mathbb{H}$ eine offen Menge, deren Rand ein Intervall (a, b) enthält und sei f eine holomorphe Funktion auf U, die auf (a, b) fortsetzbar ist und dort reellwertig ist. Dann lässt sich f auf $U \cup (a, b) \cup \overline{U}$ zu der wohldefinierten holomorphen Funktion

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z), & \text{falls } z \in U \\ \overline{f(\bar{z})}, & \text{falls } z \in \overline{U} \end{cases}$$

fortsetzen.

Für den Beweis benötigen wir zunächst folgenden Satz

5.2.1 Satz von Morera [Jä1, S. 24]

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, und für jede Dreiecksfläche in U gelte

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für die Randkurve γ des Dreiecks. Dann ist f holomorph.

Beweis: Es genügt, den Satz für eine Kreisscheibe U zu zeigen, da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist. Sei oBdA $U = B_r(0)$. Setze $a_z(t) := tz$. Dann ist $F(z) := \int_{\alpha_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ eine Stammfunktion von $f(z)$, denn für $z_0 \in U$ und $\beta_z(t) := (1-t)z_0 + tz$ ist nach Voraussetzung

$$\int_{\alpha_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\beta_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\alpha_{z_0}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

und umgeformt ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} &= \frac{1}{z - z_0} \int_{\beta_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{z - z_0} \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz) \cdot (z - z_0)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f((1-t)z_0 + tz)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Also ist $\lim_{z \to z_0} \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = f(z_0)$ und f ist als Ableitung einer holomorphen Funktion wieder holomorph. $\square$

Beweis von Satz 5.2:

Betrachte eine in $U \cup \overline{U}$ gelegene Dreiecksfläche. Zerlege das Randintegral in

$$\int_\gamma \tilde{f}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \tilde{f}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \tilde{f}\,\mathrm{d}z$$

in einen oberen und einen unteren Bereich. Dann ist

$$\int_{\gamma_1} \tilde{f}\,\mathrm{d}z \overset{\text{Stetigkeit}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_{1_\varepsilon}} \tilde{f}\,\mathrm{d}z \overset{\text{CIS}}{=} 0,$$

wobei γ_{1_ε} den Bereich berandet, den $\{z \mid \mathrm{Im} z > \varepsilon\}$ von dem Dreieck abschneidet. Aus dem Satz von Morera folgt nun die Holomorphie von $\tilde{f}$. □

5.3 Korollar [Yo2, S. 70]

Sei f holomorph auf $U \cup (a,b) \cup \overline{U}$ und $f((a,b))$ Teil eines Kreises C. Dann ist $f(\overline{U})$ das Spiegelbild von $f(U)$ bezüglich C. Es gilt sogar: Ist r_C die Spiegelung an C, so ist

$$f(\bar{z}) = r_C \circ f(z) \quad \text{für alle } z \in U.$$

Beweis: Wähle drei Punkte $z_2, z_3, z_4 \in C$ und wende Satz 5.2 auf $(\bullet, z_2, z_3, z_4) \circ f$ an und beachte, dass die analytische Fortsetzung von $f|_U$ nach $U \cup (a,b) \cup \overline{U}$ eindeutig ist.

6 Fortsetzung der Schwarzschen Abbildung auf die untere Halbebene

Wendet man die Erkenntnisse aus dem letzten Abschnitt nun auf die Schwarzsche Abbildung an, kann man sie auf die untere Halbebene $\mathbb{H}^-$ fortsetzen.
Wir wissen bereits, dass $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0,1\})$ von γ_0 und γ_1 erzeugt wird, wobei γ_1 und γ_2 mathematisch positive Schleifen um 0 bzw. 1 sind.

6.1 Proposition

Seien r_1, r_2 und r_3 die Spiegelungen an den Seiten $f_0((-\infty,0)), f_0((0,1))$ bzw. $f_0((1,\infty))$ des schwarzschen Dreiecks T und sei G die Untergruppe der Gruppe der Homöomorphismen von $\mathbb{P}^1$, die von $a_{21} = r_2 \circ r_1,\ a_{32} = r_3 \circ r_2$ (und $a_{31} = r_3 \circ r_1 = a_{32} \circ a_{21}$) erzeugt wird. Sei außerdem $\rho : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0,1\}) \to \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ die Monodromiedarstellung. Dann ist

$$\mathrm{Bild}(\rho) = G$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $\rho(\gamma_0) = r_2 \circ r_1$ und $\rho(\gamma_1) = r_3 \circ r_2$. f_0^i bezeichne die analytische Fortsetzung von f_0 nach $\mathbb{H}^-$ durch Spiegeln mit r_i

(analog bezeichne f_0^{ij} die analytische Fortsetzung von f_0^i durch Spiegeln mit r_j). Nach Korollar 5.3 erfüllt diese $r_i \circ f_0^1(z) = f_0(\bar{z})$. Für die analytische Forsetzung entlang γ_0 muss nun gelten

$$\rho(\gamma_0) f_0(z) = f_0^{12}(z) = r_2 \circ f_0^1(\bar{z}) = r_2 \circ r_1 \circ f_0(z)$$

Für γ_1 funktioniert die Rechnung analog. Insgesamt ist also $\rho(\gamma_0) = r_2 \circ r_1$ und $\rho(\gamma_1) = r_3 \circ r_2$ wie behauptet und damit

$$\mathrm{Bild}(\rho) = G$$

□

Literatur

[Con] Conway J. B.: Functions of One Complex Variable I, Springer

[Yo2] Yoshida, M.: Hypergeometric Function, My Love, Vieweg

[Jä1] Jänich, K.: Funktionentheorie - Eine Einführung, Springer

[...] Einträge ohne Verweis stammen aus einem Aufschrieb von Dr. André Kappes