

Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 7

Bitte beachten Sie die Bearbeitungszeit!

Aufgabe 1 (4P)

Gegeben seien die Funktionen

- a) $f(x, y) := e^x + e^{-y^2}$,
- b) $f(x, y) := \cos(y) \cdot \sqrt[3]{y}$,
- c) $f(x, y) := |y| - 1$.

Betrachten Sie für die Funktionen $f(x, y)$ das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(0) = 0.$$

Entscheiden und begründen Sie, ob in einem Intervall $[0, 0+a]$ für $a > 0$ eine reellwertige Lösung existiert. Diskutieren Sie gegebenenfalls, ob diese eindeutig ist.

Aufgabe 2 (4P)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x^2 \cdot y(x) + 1, \quad y(0) = 1.$$

Geben Sie dafür die ersten sieben Koeffizienten einer Potenzreihe um den Punkt 0 an, welche jenes AWP löst.

Zusatzaufgabe: Mixed DGI (0P)

Lösen Sie die folgenden AWP'e auf geeigneten Intervallen.

- a) $y' = -4x^2 \cdot y(x) + 3x^2$, $y(0) = 1$,
- b) $y' = \sin(x) \cdot \sqrt{y}$, $y(0) = \frac{1}{4}$,
- c) $y' = \frac{1 + y^2}{x}$, $y(1) = 1$,
- d) $y' = (-x + y + 2)^2$, $y(0) = -2$.

(Tipp: d) Substitution)