Prof. Dr. M. Möller
Dr. Dominik Ufer
Quentin Gendron
Christian Weiss

WS 2012/13
Frankfurt/M., 24. Januar 2013
Abgabetermin: 14.01.2013

Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 5[1]

Aufgabe 1

Sei $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ ein Anfangswertproblem. Wir haben im Beweis von Satz 10.1 den Operator

$$T : y \to y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t$$

definiert. In dieser Aufgabe betrachten wir $f = 1 + y^2$ und $y(0) = 0$.

i) Berechnen Sie $T^n(u_0)$ für $n \in \{1, \cdots, 3\}$, mit $u_0 = 0$.

ii) Lösen Sie explizit diese Differentialgleichung und vergleichen Sie die Taylorreihe der Lösung mit $T^3(u_0)$.

Aufgabe 2

Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = a(x) \cdot y + b(x) \cdot y^\alpha,$$

mit $\alpha \neq 1$, heißt *Bernoullische Differentialgleichung.*

i) Finden Sie eine Transformation $z = g(y)$, sodass die Bernouillische Differentialgleichung sich in die lineare Differentialgleichung

$$\frac{1}{1-\alpha} z'(x) = a(x) \cdot z(x) + b(x)$$

transformiert.

ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = y + xy^2$ und $y(0) = 1$.

[1] *auch im Internet unter*
www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/ag/personen/lehnert_ralf/FtDgl1213/index.html
und im e-Learning System OLAT

Prof. Dr. M. Möller
Dr. Dominik Ufer
Quentin Gendron
Christian Weiss

WS 2012/13
Frankfurt/M., 24. Januar 2013
Abgabetermin: 14.01.2013

Aufgabe 3

Sei K eine kompakte Menge und $G : K \to \mathbb{R}_{>0}$ eine *stetige* positive Funktion. Wir definieren der Norm

$$||f||_{\infty,G} := \sup_{x\in K} \{|f(x)| \cdot G(x)\}$$

auf $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{R})$ vollständig bezüglich der Norm $||\cdot||_{\infty,G}$ ist.

Aufgabe 4

Finden Sie *alle* Lösungen des Anfangswertproblems $(y')^3 = 27y^2$ und $y(0) = 0$ auf $\mathbb{R}$.
Tipp: Betrachten Sie das maximale Intervall auf dem eine Lösung null ist.