Prof. Dr. M. Möller
Q. Gendron, D. Ufer, C. Weiß

WS 2012/2013
Frankfurt/M., 30.11.2012
Abgabetermin: 14.12.2012

Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Sei G offen und sternförmig mit Zentrum 0. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ nicht integrierbar ist.

Aufgabe 2

Berechnen Sie mittels dem Cauchy-Integralsatz und der Cauchy-Integralformel die folgende Integrale:

a) $$\int_{\partial B_2(0)} \frac{e^{-z}}{(z-1)^3} dz,$$
b) $$\int_{\partial B_1(i/2)} \frac{z^5+1}{z^2(z^2+1)} dz,$$
c) $$\int_{\partial B_2(0)} \frac{e^{2z}}{z^2-1} dz.$$

Aufgabe 3

Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ und $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ sei die Funktion $f(z) = (z-1)^{-n}(z-3)^{-m}$ gegeben. Berechnen Sie

$$\int_{\partial B_2(0)} f(z) dz.$$

(Tipp: Fallunterscheidung!)

Aufgabe 4

Sei $f\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph in der Kreisscheibe $B_r(z_0)$ mit Radius $r > 0$ um z_0. Sei f beschränkt in $B_r(z_0)$ durch $M > 0$, d.h. $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in B_r(z_0)$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq M \frac{n!}{r^n}.$$

(Tipp: Man verwende die Cauchysche Integralformel.)