Prof. Dr. M. Möller
Dr. Dominik Ufer
Quentin Gendron
Christian Weiss

WS 2012/13
Frankfurt/M., 16. November 2012
Abgabetermin: 30.11.2012

Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 3[1]

Aufgabe 1

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene, zusammenhängend Teilmenge. Eine holomorphe Abbildung $l : U \to \mathbb{C}$ ist ein *Logarithmus* wenn für alle $z \in U$ die Gleichung $\exp(l(z)) = z$ gilt. Wir definieren auch $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$. Zeigen Sie:

i) Sei $l : U \to \mathbb{C}$ einen Logarithmus in U gegeben. Dann ist eine Abbildung $\hat{l} : U \to \mathbb{C}$ ein Logarithmus genau dann wenn eine ganze Zahl n existiert, sodass $\hat{l} = l + 2i\pi n$ gilt.

ii) Sei $l : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung, sodass $\exp \circ\, l = \mathrm{Id}$ gilt. Dann ist l holomorph, also ein Logarithmus.

iii) Sei $f : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}; z = re^{i\varphi} \to \log(|z|) + i\varphi$ gegeben. Zeigen Sie, dass f ein Logarithmus ist und dass in $B_1(1)$ die Formel

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(z-1)^k$$

gilt.

Aufgabe 2

Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Dann heißt

$$\mathrm{ind(C, z)} := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{w - z}}$$

die *Umlaufzahl* von γ bzl. z.

i) Berechnen Sie $\mathrm{ind}(\gamma, \mathrm{z})$ für $z = 0$ und γ die k-fach durchlaufene Kreislinie von Radius $r > 0$ um 0, d.h. γ ist gegeben durch die Gleichung $\gamma(t) = re^{2i\pi kt}$, $t \in [0, 1]$.

[1] *auch im Internet unter* www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/ag/personen/lehnert_ralf/FtDgl1213/index.html *und im e-Learning System* OLAT

Prof. Dr. M. Möller
Dr. Dominik Ufer
Quentin Gendron
Christian Weiss

ii) Zeigen Sie, dass $\operatorname{ind}(\gamma, \mathrm{z}) \in \mathbb{Z}$ für alle geschlossenen Wege γ und für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$.

Tipp: Benützen Sie die Abbildung

$$H(t) = \exp(-\int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u) - z})\mathrm{d}u) \cdot (\gamma(t) - z)$$

als Hilfsfunktion.

iii) Seien $z_0, z_1 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ so, dass ein Weg γ von z_0 nach z_1 in $\mathbb{C} \setminus \gamma$ existiert. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ind}(\gamma, \mathrm{z}_0) = \operatorname{ind}(\gamma, \mathrm{z}_1)$.

Aufgabe 3

Sei $\gamma(t) = e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$\overline{\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z} = -\int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z^2}\mathrm{d}z$$

gilt.