Prof. Dr. M. Möller
Q. Gendron, D. Ufer, C. Weiß

WS 2012/2013
Frankfurt/M., 02.10.2012
Abgabetermin: 16.10.2012

Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Gegeben sei die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{n!}$.

(i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $f(z)$ um 0.

(ii) Zeigen Sie, dass es eine dichte Teilmenge von Punkten am Rand des Konvergenzradius gibt, so dass die Reihe dort nicht konvergiert. (Tipp: i ist ein solcher Punkt).

Bemerkung: Es gibt ebenso eine dichte Teilmenge von Punkten am Rand des Konvergenzradius, so dass die Reihe dort konvergiert. Dies brauchen Sie nicht zeigen.

Aufgabe 2

Finden Sie eine Potenzreihe mit Konvergenzradius 1, welche auf dem gesamten Rand divergiert. Begründen Sie!

Aufgabe 3

Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Zeigen Sie, dass jede lokal gleichmäßig konvergente Folge (f_n) von Funktionen $f_n\colon K \to \mathbb{C}$ auch gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 4

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und $a_0 \neq 0$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|2z| < R$ gelte $f(2z) = (f(z))^2$. Zeigen Sie die Identität $f(z) = e^{a_1 \cdot z}$.