Prof. Dr. M. Möller
Dr. Dominik Ufer
Quentin Gendron

WS 2012/13
Frankfurt/M., 19. Oktober 2012
Abgabetermin: 2.11.2012

Funktionentheorie und gewöhnliche Differentialgleichungen

Übungsblatt 1[1]

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ jeweils alle Funktionen $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, so dass die Abbildung $u + iv$ in jedem Punkt $x + iy \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist:

i) $u(x + iy) = y^2 - x^3 + y^4$,

ii) $u(x + iy) = x^2 - y^2 + e^{-y} \sin x - e^y \cos x$.

Aufgabe 2

Das Ziel dieser Aufgabe ist es den folgenden Satz zu beweisen:
Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge. Wenn U offen und zusammenhängend ist, dann ist U wegzusammenhängend.
Sei $x \in U$ fest und $W_x := \{y \in U|$ es existiert einen Weg von x nach $y\}$.

i) Zeigen Sie, dass W_x eine nicht leere, offene Untermenge von U ist.

ii) Beweisen Sie, dass $U \setminus W_x$ eine offene Menge ist.
Tipp: Wenn z in $U \setminus W_x$ liegt, sollte man W_z betrachten.

iii) Beweisen Sie den Satz mithilfe von i) und ii).

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch:

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{wenn } \mathrm{Im(z)} \geq 0 \\ \bar{z}^2 & \text{wenn } \mathrm{Im(z)} < 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Punkte in denen f holomorph ist.

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung.
Zeigen Sie, dass f eine konstante Abbildung ist genau dann wenn die Funktion $\mathrm{Re(f)} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ eine konstante Abbildung ist.

[1] *auch im Internet unter* www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/ag/personen/lehnert_ralf/FtDgl1213/index.html *und im e-Learning System* OLAT