SS 2013
Prof. Dr. M. Möller Frankfurt/M., 1.07.2013
Quentin Gendron Abgabetermin: 8.07.2013

Darstellungstheorie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_k]$ wird *antisymmetrisch* genannt, falls für alle $\sigma \in S_k$ die Gleichung $\sigma \cdot P = \mathrm{sign}(\sigma)P$ gilt.
Zeigen Sie: Ist P antisymmetrisch, so ist P durch $\Delta(X)$ teilbar und $P/\Delta(X)$ symmetrisch.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Leiten Sie die Giambelli-Formel

$$S_\lambda = \det(E_{\lambda'_i+j-i})_{i,j=1}^{k}.$$

aus der Jacobi-Trudi-Formel her.

Hinweis: Die Matrizen $(H_{i-j})_{1\leq i,j\leq N}$ und $((-1)^{i-j}E_{i-j})_{1\leq i,j\leq N}$ sind zueinander invers. Benutzen Sie nun Blatt 5, Aufgabe 3.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $r \geq 1$, dann definieren wir $P_r := \sum_i X_i^r$ und für jede Partition $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ das Polynom $P_\lambda = P_{\lambda_1} \cdots P_{\lambda_n}$.

i) Beweisen Sie: Die monosymmetrischen Polynome (M_λ) bilden eine Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls der symmetrischen Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

ii) Beweisen Sie, dass (P_λ) eine $\mathbb{Q}$-Basis des Vektorraumes der symmetrischen Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ bildet.

iii) Zeigen Sie, dass (P_λ) keine $\mathbb{Z}$-Basis des $\mathbb{Z}$-Moduls der symmetrischen Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ bildet.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{C}$ die Konjugationsklasse von S_n, die aus den n-Zyklen besteht. Zeigen Sie, dass $\chi_\lambda(\mathcal{C}) \neq 0$ genau dann, wenn λ von der Form $(\lambda_1, 1, 1, \cdots, 1)$ ist. Berechnen Sie $\chi_\lambda(\mathcal{C})$ in diesem Fall.