Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron

SS 2013
Frankfurt/M., 3.06.2013
Abgabetermin: 10.06.2013

Darstellungstheorie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Konjugationsdarstellung ρ_{konj} einer Gruppe G ist die Darstellung auf dem Vektorraum $\bigoplus_{x\in G} \mathbb{C}\cdot x$ induziert durch die Operation von G auf G durch Konjugation (siehe Beispiel 3.7 für eine ähnliche Konstruktion).
Schreiben Sie die Konjugationsdarstellung ρ_{konj} von A_4 als direkte Summe von irreduziblen Darstellungen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $H \leq G$ zwei Gruppen, V und W zwei k-Vektorräume, $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ und $\tau : H \to \mathrm{GL}(W)$ zwei Darstellungen. Zeigen Sie, dass

$$\rho \otimes \mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\tau) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Res}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\rho)\otimes\tau)$$

gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $K \leq H \leq G$ Gruppen und $\rho : K \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von H.

i) Zeigen Sie, dass
$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{H}}(\rho)) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}(\rho)$$
gilt.

ii) Sei $V := \{\mathrm{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \leq S_4$ und $\rho : V \to \mathbb{C}$ die Darstellung geben durch
$$\rho((12)(34)) = -1, \text{ und } \rho((13)(24)) = -1.$$
Bestimmen Sie die induzierten Darstellungen $\mathrm{Ind}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{A}_4}(\rho)$ und $\mathrm{Ind}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{S}_4}(\rho)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Das semidirekte Produkt der Gruppen $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist durch

$$G := \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} := \left\langle \alpha, \beta | \alpha^4 = \beta^3 = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta = e \right\rangle$$

definiert (siehe Blatt 3, Aufgabe 2). Also ist $\langle\beta\rangle$ Untergruppe von G. Schreiben Sie die induzierten Darstellungen aller irreduziblen Darstellungen dieser Gruppe als Summe irreduzibler Darstellungen von G.
Hinweis: Die Charaktertafel von G ist die Tafel aus Aufgabe 2 des dritten Blattes. Die zwei fehlenden Zeilen sind:

	e	u	v	w	x	y
χ_5	2	-1	0	-1	0	2
χ_6	2	-1	0	1	0	-2