Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

SS 2013
Frankfurt/M., 6.05.2013
Abgabetermin: 13.05.2013

Darstellungstheorie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Seien V_1 und V_2 zwei endlichdimensionale Vektorräume. Beweisen Sie, dass

$$\wedge^k(V_1 \oplus V_2) \cong \bigoplus_{i+j=k} \left((\wedge^i V_1) \otimes (\wedge^j V_2)\right).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Darstellungen einer endlichen Abelschen Gruppe in $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$.

Tipp: Jede endliche kommutative Gruppe ist eine direkte Summe von zyklischen Gruppen.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

i) Sei K ein Körper von Charakteristik ungleich 0. Gegeben Sie eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ einer endlicher Gruppe G, die keine direkte Summe von irreduzibler Darstellungen ist.

ii) (schwierig!) Sei G eine unendliche Gruppe, sodass jedes Element $g \in G$ endliche Ordnung hat. Beweisen Sie den Satz von Maschke für diese Gruppe G oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

In diese Aufgabe ist der Körper immer $\mathbb{C}$. Wir definieren die Untergruppe

$$S^1 := \langle z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1 \rangle \,,$$

von $\mathbb{C}^*$ bzgl. der Multiplikation.

i) Zeigen Sie, dass alle irreduziblen Darstellungen einer kommutativen Gruppe G der Form $\rho : G \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ sind.

ii) Bestimmen Sie alle stetigen, irreduziblen Darstellungen von S^1.