Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

SS 2013
Frankfurt/M., 22.04.2013
Abgabetermin: 29.04.2013

Darstellungstheorie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\mathrm{ggT}(n,m)\mathbb{Z}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei (e_1, e_2, e_3, e_4) eine Basis von $\mathbb{R}^4$. Wir betrachten die kanonischen Projektionen $\pi_1 : \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4 \to \mathrm{Sym}^2(\mathbb{R}^4)$ und $\pi_2 : \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4 \to \Lambda^2\mathbb{R}^4$ und die kanonischen Basen $(e_i \otimes e_j | 1 \leq i \leq j \leq 4)$ von $\mathrm{Sym}^2(\mathbb{R}^4)$ und $(e_i \wedge e_j | 1 < i < j < 4)$ von $\Lambda^2\mathbb{R}^4$. Sei $\theta = e_1 \otimes e_3 - e_2 \otimes e_4 - 3e_3 \otimes e_1 + 2e_2 \otimes e_2$ ein Element von $\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4$.

i) Geben Sie $\pi_1(\theta)$ und $\pi_2(\theta)$ in den kanonischen Basen von $\mathrm{Sym}^2(\mathbb{R}^4)$ und $\Lambda^2\mathbb{R}^4$ an.

ii) Berechnen Sie $\pi_1(\theta) \otimes e_1$ in $\mathrm{Sym}^2(\mathbb{R}^4)$ und $\pi_2(\theta) \wedge e_1$ in $\Lambda^2\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $\beta := (e_1, e_2)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben in der Basis β mit

$$A := \mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{5} & \sin\frac{2\pi}{5} \\ -\sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}, \text{ und } B := \mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{5} & \sin\frac{\pi}{5} \\ -\sin\frac{\pi}{5} & \cos\frac{\pi}{5} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $f \otimes g$ in der Basis $(e_i \otimes e_j | i, j \in \{1, 2\})$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Seien V_1, V_2, V_3 drei R-Modul. Zeigen Sie

$$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3.$$

Tipp: Man kann, für $z \in V_3$ fest, die Abbildung

$$f_z : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) | (x, y) \to x \otimes (y \otimes z)$$

betrachten. Daher gibt es eine Abbildung

$$\psi : (V_1 \otimes V_2) \times V_3 \to V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3).$$