Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
20. Mai 2019

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber
Riccardo Zuffetti

Tutoriumsaufgaben zu Blatt 4

Aufgabe 1

(a) Sei G eine Gruppe mit zwei Elementen. Zeigen Sie: $G \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$.

(b) Zeigen Sie: Es gibt keinen Isomorphismus $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) Sei $n \in \mathbb{Z}$ keine Primzahl. Zeigen Sie: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ hat Nullteiler.

Aufgabe 2

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

Zeigen Sie: $A \mapsto a_{ij}$ ist für alle i, j ein Gruppenhomomorphismus $(\mathrm{Mat}_n(K), +) \to (K, +)$.

Ist $A \mapsto a_{ij}$ auch ein Gruppenhomomorphismus $(\mathrm{GL}_n(K), \cdot) \to (K^\times, \cdot)$?

Aufgabe 3

Für welche $x \in \mathbb{Q}$ ist die Matrix $A_x = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & x & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ invertierbar.

Geben Sie in diesen Fällen A_x^{-1} an.

Aufgabe 4

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen als $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{i}, \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3.$$

Dieses Blatt wird nur in den Tutorien besprochen und ist nicht abzugeben.