Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
13. Mai 2019

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber
Riccardo Zuffetti

Tutoriumsaufgaben zu Blatt 3

Aufgabe 1

(a) Geben Sie Kern und Bild des Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ an.

(b) Geben Sie Kern und Bild des Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_2$ an.

Aufgabe 2

(a) Sei M eine Menge. Geben Sie jeweils eine Relation an, die *nicht*

- reflexiv ist;
- symmetrisch ist;
- transitiv ist.

(b) Sei S_n die symmetrische Gruppe über n Elementen.

Zeigen Sie: $\sigma \sim \tau :\Longleftrightarrow \exists \rho \in S_n : \sigma = \rho \circ \tau \circ \rho^{-1}$ ist eine Äquivalenzrelation auf S_n.

Aufgabe 3

Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ die Menge aller Abbildungen $\mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$. Wir definieren eine Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{F}_2[X] \to \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2), \quad f \mapsto [x \mapsto E_x(f) = f(x)].$$

(a) Wir definieren eine Verknüpfung $+$ auf $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ durch

$$+\colon \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \times \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2), \quad +(f, g) \coloneqq [a \mapsto f(a) + g(a)] \eqqcolon f + g.$$

Zeigen Sie: $(\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2), +)$ ist eine Gruppe.

(b) Ist ϕ injektiv?

(c) Zeigen Sie, dass ϕ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ vermöge der Verknüpfung

$$\cdot\colon \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \times \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2), \quad \cdot(f, g) \coloneqq [a \mapsto f(a) \cdot g(a)] \eqqcolon f \cdot g$$

zu einem Ring wird und dass ϕ sogar ein Ringhomomorphismus ist.

Dieses Blatt wird nur in den Tutorien besprochen und ist nicht abzugeben.