Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
29. April 2019

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber
Riccardo Zuffetti

Tutoriumsaufgaben Woche 2 (Blatt 1)

Aufgabe 1

Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist 6 ein Teiler von $\alpha(n) := n^3 + 5n$, d.h. es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $6k = \alpha(n)$ ist.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2^{n-1} \leq n!$.

Aufgabe 2

Sie X eine endliche Menge. Zeigen Sie: $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

Aufgabe 3

(a) Sie X eine Menge. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), \cap)$ und $(\mathcal{P}(X), \cup)$ im Allgemeinen keine Gruppen sind.

Finden Sie Mengen X, sodass $(\mathcal{P}(X), \cap)$ und $(\mathcal{P}(X), \cup)$ Gruppen sind.

(b) Sie X eine Menge. Wir definieren die folgende Operation auf $\mathcal{P}(X)$:

$$\Delta\colon \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad (A, B) \mapsto A\Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ eine Gruppe ist. Ist sie abelsch?

Aufgabe 4

(a) Seien Y, Z Mengen und $g\colon Y \to Z$ eine Abbildung.

Zeigen Sie: g ist genau dann injektiv, wenn für alle Mengen X und Abbildungen $f_1, f_2\colon X \to Y$ gilt:

$$(g \circ f_1 = g \circ f_2) \implies f_1 = f_2.$$

(b) Seien X, Y Mengen und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

Zeigen Sie: f ist genau dann surjektiv, wenn für alle Mengen Z und Abbildungen $g_1, g_2\colon Y \to Z$ gilt:

$$(g_1 \circ f = g_2 \circ f) \implies g_1 = g_2.$$

(c) Geben Sie ein Beispiel für Mengen X, Y, Z und Abbildungen g, f_1, f_2 wie oben an, so dass $g \circ f_1 = g \circ f_2$ aber $f_1 \neq f_2$ gilt.

(d) Geben Sie ein Beispiel für Mengen X, Y, Z und Abbildungen f, g_1, g_2 wie oben an, so dass $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ aber $g_1 \neq g_2$ gilt.

Dieses Blatt wird nur in den Tutorien besprochen und ist nicht abzugeben.