Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
24. Juni 2019

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber
Riccardo Zuffetti

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{C}^3 \ni (x,y,z) \mapsto (iy - x, 3y - x + z, y + ix) \in \mathbb{C}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathrm{Kern}(f)$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis C von $\mathrm{Bild}(f)$.

(d) Ergänzen Sie B zu einer Basis B' des $\mathbb{C}^3$ und C zu einer Basis C' des $\mathbb{C}^3$ und geben Sie die Abbildungsmatrix von f bzgl. B' und C' an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\pi\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $\pi \circ \pi = \pi$.

Zeigen Sie, dass es Untervektorräume U, W von V gibt, so dass:

- $V = U \oplus W$;
- $\pi(U) \subseteq U$;
- $\pi(W) \subseteq W$;
- Die Einschränkung $\pi|_U\colon U \to U$ von π auf U ist die Identität;
- Die Einschränkung $\pi|_W\colon W \to W$ von π auf W ist die Nullabbildung.

(b) Sei nun $V = \mathbb{R}^3$ und $\pi\colon V \to V$ bzgl. der Standardbasis gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\pi \circ \pi = \pi$ gilt und bestimmen Sie U und W wie oben.

Geben Sie eine geometrische Interpretation von U, W und π an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien V, W K-Vektorräume, $\{b_i \mid i \in I\}$ eine Basis von V und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

Zeigen Sie:

(a) f ist surjektiv $\iff$ $[\{f(b_i) \mid i \in I\}] = W$.

(b) f ist injektiv $\iff$ $\{f(b_i) \mid i \in I\}$ ist linear unabhängig.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei K ein Körper mit $2 \neq 0 \neq 3$ in K. Auf $K[X]_{\leq d}$ definieren wir den Endomorphismus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\colon K[X]_{\leq d} \to K[X]_{\leq d}, \quad X^i \mapsto iX^{i-1}, \quad \text{für } i = 0, \ldots, d.$$

Sei im Folgenden $d = 3$.

(a) Geben Sie eine Abbildungsmatrix für $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ bzgl. der Standardbasis an.

(b) Geben Sie eine Basis für Kern $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ und Bild $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ an.

(c) Sei nun $a \in K$ und $U_3(a) \subseteq K[X]_{\leq 3}$ mit Basis $B := \{(X-a)^k \mid 1 \leq k \leq 3\}$.

Geben Sie eine Basis C von Bild $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}|_{U_3(a)} =: V$ an, sowie die Abbildungsmatrix von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}|_{U_3(a)}\colon U_3(a) \to V$ bzgl. B und C.

Bestimmen Sie außerdem $\dim \operatorname{Kern} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}|_{U_3(a)}$.

(d) Geben Sie eine lineare Umkehrfunktion Bild $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}|_{U_3(0)} \to U_3(0)$ an.

Zusatzaufgabe

Finden Sie die acht LA-Begriffe und stellen Sie sicher, dass Sie alle definieren und verwenden können!

V	E	R	K	E	T	T	U	N	G	F	D	V	L	G	M	V	S	O	R
L	E	G	E	R	S	G	N	U	Z	R	E	U	K	X	E	D	N	I	W
N	Y	N	Z	D	W	V	F	Z	O	P	L	Z	M	W	Y	C	B	B	G
Q	T	X	L	I	T	F	P	G	S	M	V	M	H	K	U	U	S	B	Y
F	U	I	Y	S	I	L	Q	A	G	G	W	S	T	O	W	U	L	M	P
G	B	R	N	E	X	T	I	Q	M	F	Q	W	O	N	M	I	E	I	O
G	K	T	S	U	S	F	A	C	K	Z	F	Q	H	S	N	U	E	N	W
C	Z	A	U	T	V	D	L	M	Q	O	M	Z	I	E	I	C	W	X	D
Z	A	M	N	G	Q	P	B	E	S	V	A	H	A	B	W	A	A	I	M
H	A	S	G	Q	Z	O	V	L	T	W	P	R	F	V	R	Z	P	O	N
B	I	G	K	W	Z	X	K	L	J	R	E	O	E	O	P	M	B	T	P
Y	V	N	P	L	H	U	V	K	O	A	P	I	A	M	Z	K	W	W	V
Q	S	U	Q	T	F	U	C	M	B	B	U	Q	K	O	J	K	C	G	N
G	D	D	U	J	X	S	O	B	R	F	Z	D	M	I	L	E	Z	N	Q
I	C	L	R	W	N	D	I	Z	C	H	B	Q	U	K	K	R	O	A	T
C	U	I	A	Q	N	L	E	S	H	X	L	F	R	E	P	N	P	R	E
G	J	B	R	E	D	O	V	T	U	I	O	Q	N	P	X	W	Y	A	Y
N	F	B	Q	U	P	C	Y	Q	W	P	G	Z	C	Q	I	D	D	L	R
N	U	A	N	J	J	R	V	D	N	O	K	W	Q	W	W	I	W	B	C
R	O	G	Z	V	Y	X	S	A	V	H	D	Y	P	X	Q	P	A	N	O

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 1. Juli** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.