

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $d \in \mathbb{N}$.

- (a) Zeigen Sie: $K[X]_{\leq d} := \{f \in K[X] : \deg(f) \leq d\} \subset K[X]$ ist ein Untervektorraum und bestimmen Sie $\dim K[X]_{\leq d}$.
- (b) Sei nun $a \in K$ und $E_a: K[X] \rightarrow K$ die zugehörige Auswertungsabbildung.
Zeigen Sie: $U_d(a) := \{f \in K[X]_{\leq d} : E_a(f) = 0\} \subset K[X]_{\leq d}$ ist ein Untervektorraum und bestimmen Sie $\dim U_d(a)$.
- (c) Sei V ein Komplement zu $U_d(a)$ in $K[X]_{\leq d}$. Bestimmen Sie $\dim V$ durch Angabe einer Basis.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $U_1, \dots, U_n \subseteq V$ endlichdimensionale Unterräume. Zeigen Sie:

(a)
$$\dim(U_1 + \dots + U_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \dim((U_1 + \dots + U_k) \cap U_{k+1}) = \sum_{k=1}^n \dim U_k.$$

- (b) Ist $n = 3$, so gilt:

$$\begin{aligned} \dim(U_1 + U_2 + U_3) + \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_2 \cap U_3) + \dim(U_1 \cap U_3) \\ \leq \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3). \end{aligned}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $(U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3) \subseteq (U_1 + U_2) \cap U_3$.

Finden Sie ein Beispiel für U_1, U_2, U_3 , so dass die Ungleichung strikt ist, d.h. keine Gleichheit gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

- (a) Geben Sie alle geordneten Basen von \mathbb{F}_2^2 an.
- (b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass \mathbb{F}_2^n genau $\prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k)$ geordnete Basen hat.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum mit geordneter Basis $B := (v_1, \dots, v_n)$. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix Θ_{BC} für

- (a) $C := (v_1, v_1 + v_2, \dots, v_1 + \dots + v_n)$ und
- (b) $C := (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$ für ein $\sigma \in S_n$.

Zusatzaufgabe

Finden Sie die acht LA-Begriffe und stellen Sie sicher, dass Sie alle definieren und verwenden können!

E	E	Z	F	A	E	P	K	Y	V	Z	Z	G	J	G	D	B	S	B
A	N	S	T	A	N	D	A	R	D	B	A	S	I	S	X	R	B	A
U	V	D	T	Q	V	G	O	S	E	Q	M	F	H	F	O	H	A	S
A	T	S	L	D	L	W	V	E	Q	G	X	Z	P	T	K	K	S	I
J	Y	I	V	I	V	E	W	F	W	N	Q	X	K	D	W	T	I	S
G	U	E	E	N	C	A	S	D	O	C	B	E	H	W	Y	J	S	W
S	Q	I	Q	K	P	H	S	H	R	Y	V	R	R	J	C	S	D	E
X	N	S	N	U	R	U	D	U	C	N	I	P	T	N	W	G	A	C
W	M	U	B	O	N	A	S	I	E	E	J	T	C	S	U	I	R	H
Z	I	S	F	J	O	B	B	T	M	L	W	U	N	R	I	J	S	S
V	V	Q	G	I	U	Q	A	L	P	E	N	S	T	Y	D	A	T	E
G	T	R	V	C	V	N	C	L	L	F	N	N	I	Q	U	P	E	L
S	S	O	D	E	I	G	Z	H	I	E	P	S	H	S	D	H	L	M
Y	T	Y	J	D	Z	G	T	E	Q	C	T	W	I	E	A	V	L	A
R	N	A	R	E	L	X	V	R	E	Q	Q	S	Y	O	B	B	U	T
W	N	O	C	L	F	V	N	A	B	I	D	E	R	Y	N	G	N	R
F	O	Y	S	P	Q	C	M	P	W	T	G	O	M	A	S	A	G	I
K	F	A	R	W	W	P	D	G	F	K	M	X	O	F	D	P	L	X
D	I	M	E	N	S	I	O	N	S	S	A	T	Z	B	S	C	N	W

Bitte nehmen Sie an der Umfrage des Lernzentrums teil:

<http://goethe.link/lzt>



Abgabe bis 10:00 am Montag, den 24. Juni in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.