Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
11. Juni 2019

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber
Riccardo Zuffetti

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für jede der folgenden Teilmengen, ob diese

(i) linear unabhängig ist;

(ii) den umgebenden Vektorraum erzeugt;

(iii) eine Basis des umgebenden Vektorraums ist.

Im $\mathbb{R}^2$: $A := \{(1, 123), (-\pi, -\pi)\}$, $\quad B := \{(2, -1/3), (-1, 1/6)\}$,
$C := \{(4/5, 5/4), (4, 5)\}$, $\quad D := \{(1, 2), (11, -7\sqrt{2}), (-1, 1)\}$.

Im $\mathbb{R}^3$: $E := \{(1, 1, 3), (2, 2, 0), (3, 3, -3)\}$,
$F := \{(1, -1, -\sqrt{5}), (1, 1, \sqrt{5}), (0, 1, 2\sqrt{5})\}$,
$G := \{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 2), (-1, -2, -3)\}$.

Im $\mathbb{C}^4$: $H := \{(1, 0, i, 0), (i, 0, i, 0), (0, 1, 1, 0), (0, i, 0, i)\}$,
$I := \{(0, 1, 1, 0), (0, -i, -2i, 1), (0, i, 0, 1), (1, 0, 0, 0)\}$.

(b) Seien $U := [(1, 0, -\sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0, -1, 0)]$ und $W := [(0, -2, 0, 3), (0, 1, 0, 1)]$.
Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 6}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{Q}^6$ des homogenen LGS $Ax = 0$.

(b) Bestimmen Sie $\dim \mathbb{L}$ und geben Sie eine Basis B von $\mathbb{L}$ an.

(c) Ergänzen Sie B zu einer Basis des $\mathbb{Q}^6$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum und $B \subset V$. Zeigen Sie:

(a) B ist genau dann eine Basis von V, wenn B ein Erzeugendensystem von V ist und jede echte Teilmenge $C \subsetneqq B$ kein Erzeugendensystem von V ist.

(b) B ist genau dann eine Basis von V, wenn B eine linear unabhängige Teilmenge von V ist und jede echte Obermenge $C \supsetneqq B$ keine linear unabgängige Teilmenge von V ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei M eine Menge und K ein Körper.

(a) Bestimmen Sie $\dim \mathrm{Abb}(M, K)$.

(b) Sei nun $M = \mathbb{N}_0$ und $K = \mathbb{R}$.

Wir betrachten für $a, b \in \mathbb{R}$ die Fibonacci-Folgen: $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{R}) \ni F_{a,b}$:

$$F_{a,b}(0) = a, \quad F_{a,b}(1) = b \quad \text{und} \quad F_{a,b}(n) = F_{a,b}(n-1) + F_{a,b}(n-2) \quad \text{für } n \geq 2.$$

Bestimmen Sie $\dim\big[\{F_{a,b} : (a,b) \in \mathbb{R}^2\}\big]$.

Zusatzaufgabe

Finden Sie die zehn LA-Begriffe und stellen Sie sicher, dass Sie alle definieren und verwenden können!

L	K	O	M	P	L	E	M	E	N	T	Q	U	T	F	P	Y	N
I	I	Z	T	D	I	U	H	Q	J	S	L	L	K	T	B	M	O
P	R	N	H	H	H	T	I	L	I	E	B	I	Z	O	E	O	I
Q	J	G	E	E	S	U	T	S	W	I	B	O	B	T	G	M	T
P	M	J	C	A	B	T	A	O	S	V	B	X	S	A	P	S	A
W	X	M	I	T	R	B	N	G	L	E	G	Y	J	L	P	F	L
N	C	C	B	Y	H	U	Q	K	R	Q	S	A	Y	G	E	N	E
U	O	F	T	G	J	M	N	E	J	N	N	U	M	E	C	Z	R
J	H	I	F	T	G	C	S	A	E	M	M	E	I	O	J	E	S
Z	H	R	S	O	Z	C	H	D	B	C	E	Q	A	R	U	V	G
M	Q	F	Z	N	H	X	N	D	V	H	P	M	U	D	H	X	N
L	Y	O	K	R	E	E	A	P	Q	N	A	E	X	N	V	D	U
R	J	U	A	E	G	M	X	N	U	U	N	E	E	E	J	N	N
O	I	N	O	U	T	W	I	K	K	D	H	Y	N	T	Y	L	D
O	K	Z	E	R	T	T	P	D	J	Y	W	A	F	G	Y	O	R
E	M	Z	Q	T	G	W	E	G	V	P	K	E	V	Q	I	T	O
Z	R	T	V	R	O	C	R	X	D	R	M	P	N	T	O	G	D
E	Q	A	M	M	E	L	S	E	H	C	S	N	R	O	Z	U	E

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 17. Juni** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.