Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2019
13. Mai 2019

Lineare Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber
Riccardo Zuffetti

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (3 Punkte)

(a) Geben Sie Kern und Bild des Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_4$ an.

(b) Sei k ein Körper. Bestimmen Sie $k[X]^\times$.

(c) Bestimmen Sie $\mathbb{Z}[X]^\times$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(a) Sei S ein kommutativer Ring, $R \subseteq S$ ein Unterring und $R[X]$ der Polynomring zu R.

Zeigen Sie: Für $s \in S$ ist die Auswertungsabbildung

$$E_s \colon R[X] \to S, \quad f \mapsto f(s)$$

ein Ringhomomorphismus.

(b) Zeigen Sie: Die Menge $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] := \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ ist ein Körper (bezüglich der Einschränkung von $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{R}$).

(c) Geben Sie einen surjektiven Ringhomomorphismus $\mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ an.

Ist dieser Ringhomomorphismus injektiv?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien M, N Mengen und $f \colon M \to N$ eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie: $x \sim y :\Longleftrightarrow f(x) = f(y)$ ist eine Äquivalenzrelation auf M.

(b) Für $x \in M$ setzen wir $[x]_\sim := \{y \in M \mid x \sim y\}$ und $M/\!\sim\, := \{[x]_\sim \mid x \in M\}$.

Zeigen Sie: Die Abbildung $\widetilde{f} \colon M/\!\sim\, \to N, [x]_\sim \mapsto f(x)$ ist wohldefiniert und injektiv.

(c) Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Geben Sie ein Vertretersystem von $\mathbb{R}/\!\sim$ an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(G, \cdot\,)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe.

(a) Zeigen Sie, dass $x \sim_H y :\Longleftrightarrow x^{-1} \cdot y \in H$ eine Äquivalenzrelation auf G definiert.

(b) Sei $x \in G$. Zeigen Sie: $[x]_{\sim_H} = \{x \cdot h \mid h \in H\}$.

(c) Sei nun $(G, \cdot\,) = (\mathbb{Z}, +)$. Geben Sie ein Vertretersystem von $\mathbb{Z}/\sim_{3\mathbb{Z}}$ an.

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 20. Mai** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.