

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung.

Zeigen Sie: f ist injektiv $\iff f$ ist surjektiv $\iff f$ ist bijektiv.

(b) Gegeben sei eine lineare Abbildung Φ von \mathbb{C}^3 , die in der Standardbasis durch die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ -1 & 1 & -i \\ 1+i & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie, ob Φ invertierbar ist und berechnen Sie gegebenenfalls die Abbildungsmatrix der Umkehrabbildung.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie den Rang der Telefonmatrix

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ * & 0 & \# \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $*$ und $\#$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und

- B die Menge der Bilinearformen,
- A die Menge der alternierenden Bilinearformen,
- S die Menge der symmetrischen Bilinearformen.

auf V . Zeigen Sie:

- B ist ein Untervektorraum von $\text{Abb}(V \times V, K)$ und A, S sind Unterräume von B ;
- $B = A \oplus S$, falls die Charakteristik von K ungleich 2 ist;
- $A \subseteq S$, falls die Charakteristik von K gleich 2 ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei K ein Körper mit Charakteristik ungleich 2.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\beta: K^n \times K^n \rightarrow K, \quad (x, y) \mapsto \beta(x, y) := x^T y$$

eine symmetrische Bilinearform ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\Phi: \mathbb{Q}^3 \times \mathbb{Q}^3 \rightarrow \mathbb{Q}, \quad (x, y) \mapsto \Phi(x, y) := x^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} y$$

eine alternierende Bilinearform auf \mathbb{Q}^3 ist. Ist Φ symmetrisch?

(c) Sei $A \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\Phi: K^n \times K^n \rightarrow K, \quad (x, y) \mapsto \Phi(x, y) := x^T A y$$

genau dann eine alternierende Bilinearform ist, wenn $A + A^T = 0$.

Zusatzaufgabe

Finden Sie die zehn LA-Begriffe und stellen Sie sicher, dass Sie alle definieren und verwenden können!

W	Z	R	M	R	K	Q	F	U	S	K	A	S	B	Z	M	Q	I	C	S
S	E	L	A	U	G	U	G	P	T	E	E	G	D	O	U	X	S	B	Y
P	I	O	B	U	L	Y	D	Y	H	U	Q	P	I	M	V	B	R	N	M
A	L	F	Z	T	M	T	K	Q	L	F	U	U	V	Z	U	I	C	Y	M
L	E	Q	X	A	E	C	I	E	K	J	I	R	J	I	C	C	X	N	E
T	N	S	C	R	M	U	R	L	W	R	V	H	T	C	U	F	M	Y	T
E	R	U	H	F	R	Y	E	K	I	Z	A	V	M	Z	U	D	L	J	R
N	A	R	A	P	O	S	C	H	Y	N	L	W	U	P	P	Q	O	M	I
R	N	P	R	N	F	D	B	A	U	B	E	Z	A	X	K	R	E	T	S
A	G	X	A	T	R	Q	J	G	I	B	N	A	R	Y	Y	B	S	P	C
N	L	S	K	T	A	K	Y	Q	N	X	Z	X	R	C	S	R	U	P	H
G	F	H	T	Y	E	L	G	N	H	S	R	I	O	F	X	P	N	G	Y
O	D	L	E	V	N	B	T	R	O	R	E	V	T	D	O	B	G	K	Z
E	T	V	R	A	I	Q	R	Q	M	L	L	M	K	J	J	R	S	S	D
H	A	C	I	J	L	F	K	Q	O	C	A	E	A	R	P	I	M	Y	C
L	H	L	S	L	I	J	M	R	G	D	T	P	F	P	E	R	E	L	L
Z	Q	K	T	A	B	S	S	R	E	Q	I	P	X	W	L	F	N	K	Y
Z	I	C	I	V	O	H	V	H	N	Q	O	X	U	G	X	B	G	N	E
J	D	O	K	F	Y	O	I	L	D	R	N	U	R	C	B	P	E	Y	Y
Y	Q	T	D	M	O	S	U	A	O	B	R	D	O	L	X	G	A	N	B

Abgabe bis 10:00 am Montag, den 8. Juli in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.