Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2018
22. Oktober 2018

Komplexe Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. David Torres-Teigell
M.Sc. Riccardo Zuffetti

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien E und F Vektorbündel auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X vom Rang r bzw. r'.

(a) Zeigen Sie, dass ein Vektorbündel $\pi : E \oplus F \to X$ zusammen mit zwei (Vektorbündel-) Homomorphismen $\pi_E : E \to E \oplus F$ und $\pi_F : F \to E \oplus F$ existiert, sodass die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:

Für jedes Vektorbündel $\phi : G \to X$ mit Homomorphismen $\phi_E : E \to G$ und $\phi_F : F \to G$ existiert genau ein Homomorphismus $\psi : E \oplus F \to G$, sodass $\phi_E = \psi \circ \pi_E$ und $\phi_F = \psi \circ \pi_F$.

Zeigen Sie, dass dieses Vektorbündel, die sogenannte *direkte Summe*, eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus ist.

(b) Ein Homomorphismus von Vektorbündeln (auf der selben komplexen Mannigfaltigkeit X) $\phi : E \oplus F \to G$ heißt *bilinear*, wenn die Einschränkungen auf die Fasern bilinear sind.

Zeigen Sie, dass ein Faserbündel $E \otimes F$ zusammen mit einem bilinearen Homomorphismus (von Vektorbündeln) $\Psi : E \oplus F \to E \otimes F$ existiert, sodass die folgende unuiverselle Eigenschaft erfüllt ist:

Für jedes Vektorbündel G auf X und für jeden bilinearen Homomorphismus $\phi : E \oplus F \to G$ existiert ein eindeutiger Morphismus $\psi : E \otimes F \to G$, sodass $\phi = \psi \circ \Psi$.

Zeigen Sie, dass dieses Vektorbündel, das sogenannte *Tensorprodukt*, eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus ist.

Hinweis: Die Vektorbündel E und F werden durch die Kozykel-Relationen von zwei Überlagerungen von X – eine für E und eine für F – bestimmt. Bis auf die passende Wahl einer offenen Überdeckung $\bigcup_{i \in I} U_i$ von X (Finden Sie diese!), können wir annehmen, dass E und F durch die folgenden Kozykel bestimmt sind:

$$\{U_i, \psi_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(r, \mathbb{C})\},$$
$$\{U_i, \psi'_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(r', \mathbb{C})\}.$$

Konstruieren Sie $E \oplus F$ und $E \otimes F$ explizit. Drücken Sie die entsprechenden Kozykel-Relationen in Termen jener von E und F aus, um die existenz zu zeigen.

Erinnerung: Für lineare Abbildungen $f : V \to V'$ und $g : W \to W'$ zwischen Vektorräumen, ist $f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'$ die lineare Abbildung, sodass $(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$. Insbesondere gilt wenn $dim V = dim V' = 1$, dass $V \otimes W = W$ und $f \otimes g = f \cdot g$.

Bemerkung: Klassische Konstruktionen in der Linearen Algebra geben den Anstoß für geometrische Konstruktionen von holomorphen Vektorbündeln. Im folgenden sind ein paar nützliche Beispiele aufgeführt, die Sie bei Interesse explizit konstruieren können.

Mit der Notation aus Aufgabe 1 definieren wir:

- Die *k-te äußere Potenz*, wobei $0 \leq k \leq r$:

$$\bigwedge^k E \longleftrightarrow \left\{ U_i, \wedge^k \psi_{ij} : U_i \cap U_j \to GL\left(\binom{k}{r}, \mathbb{C} \right) \right\}.$$

  Der spezielle Fall $k = r$ ist das sogenannte *Determinantenbündel*:

$$\det(E) \longleftrightarrow \{U_i, \det(\psi_{ij}) : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*\}.$$

- Das *duale Bündel*:

$$E^* \longleftrightarrow \{U_i, (\psi_{ij}^\top)^{-1}\}$$

  Beachten Sie, dass $(E^*)^*$ kanonisch isomorph zu E ist. Des weiteren ist für ein Geradenbündel E das Tensorprodukt $E \otimes E^*$ isomorph zum trivialen Bündel $X \times \mathbb{C}$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Sei L ein holomorphes Geradenbündel auf einer zusammenhängenden kompakten komplexen Mannigfaltigkeit X. Zeigen Sie, dass L trivial, also isomorph zu $X \times \mathbb{C}$, ist, genau dann wenn L und das duale Bündel L^* nicht-triviale globale Schnitte besitzen.

Hinweis: Benutzen Sie die nicht-trivialen Schnitte, um einen nicht-trivialen Schnitt von $L \otimes L^*$ zu konstruieren. Benutzen Sie diesen um einen Isomorphismus von Vektorbündeln $\Psi : X \times \mathbb{C} \to L$ zu konstruieren. Benutzen Sie dafür auch die Eigenschaften des dualen Bündels aus der vorherigen Bemerkung.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien L_1 und L_2 zwei holomorphe Geradenbündel auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X. Sei $Y \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit von Kodimension größer 1, sodass L_1 und L_2 auf $X \backslash Y$ isomorph sind. Zeigen Sie, dass $L_1 \cong L_2$.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2 vom Übungsblatt 2. Arbeiten Sie lokal mit Trivialisierungen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $L \in \mathrm{Pic}(X)$ ein Geradenbündel und $Y \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit von Kodimension größer 1. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $H^0(X, L) \to H^0(X \backslash Y, L)$ bijektiv ist.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 2 vom Übungsblatt 2. Arbeiten Sie lokal mit Trivialisierungen.