Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2018
5. Oktober 2018

Komplexe Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. David Torres-Teigell
M.Sc. Riccardo Zuffetti

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei ρ eine fünfte Einheitswurzel. Die Gruppe $G = <\rho> \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ operiert auf $\mathbb{P}^3$ durch

$$(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \longmapsto (z_0 : \rho z_1 : \rho^2 z_2 : \rho^3 z_3).$$

Beschreiben Sie alle Fixpunkte dieser Operation. Zeigen Sie, dass die Fläche

$$Y = \{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) | \sum_{j=0}^{3} z_j^5 = 0\} \subset \mathbb{P}^3$$

G-invariant ist und dass die induzierte Operation auf Y fixpunktfrei ist. Folgern Sie, dass $X = Y/G$ eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, die sogenannte *Godeaux-Fläche*, ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}^n$ keine kompakten Untermannigfaltigkeiten von positiver Dimension enthält. (Im Gegensatz zum reellen Fall, wo sich jede Mannigfaltigkeit, ob kompakt oder nicht, als Untermannigfaltigkeit in einen $\mathbb{R}^N$ einbetten lässt.)

Finden Sie einen holomorphen Atlas auf der reellen 2-Sphäre S^2, indem Sie die stereographische Projektion verwenden. Unter der natürlichen Einbettung $\mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ kann die Sphäre S^2 als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}^2$ betrachtet werden. Warum steht dies nicht im Widerspruch zur vorherigen Aussage?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede Hopf-Fläche eine elliptische Kurve als Untermannigfaltigkeit enthält.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 4 von Übungsblatt 3

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3,\ (s : t) \mapsto (s^3 : s^2 t : st^2 : t^3)$. Das Bild dieser Abbildung ist die sogenannte *twisted cubic*. Zeigen Sie, dass dies eine Mannigfaltigkeit ist und beschreiben Sie diese als Nullstellenort (homogener) Polynome im $\mathbb{P}^3$.

Hinweis: Sie benötigen drei Polynome.

Abgabe Zu Beginn der Vorlesung um **10:00** am **Montag, den 19. November**.