Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2018
5. Oktober 2018

Komplexe Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. David Torres-Teigell
M.Sc. Riccardo Zuffetti

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei Λ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Die *Weierstraß $\wp$-Funktion (zum Gitter Λ)* ist mittels folgender Reihe definiert:

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Die *Eisensteinreihe vom Gewicht $2k$ (zum Gitter Λ)* ist die Reihe:

$$G_{2k} := \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \omega^{-2k}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $k > 1$ die Eisensteinreihe G_{2k} absolut konvergiert.

Hinweis: Es gibt eine Konstante $c = c(\Lambda)$, sodass $\#\{\omega \in \Lambda \,:\, N \leq |\omega| < N+1\} < cN$.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\wp$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit Polen der Ordnung 2 in den Gitterpunkten und ohne weitere Pole definiert.

Hinweis: Nutzen Sie den vorherigen Hinweis, um zu zeigen, dass $\wp(z)$ für $z \in \mathbb{C}\setminus\Lambda$ absolut konvergiert und dass $\wp$ auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}\setminus\Lambda$ gleichmäßig konvergent ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\wp$ eine meromorphe Funktion auf dem Quotienten $\mathbb{C}/\Lambda$ definiert.

Hinweis: Berechnen Sie die Ableitung $\wp'(z)$ und zeigen Sie, dass $\wp(z+\omega) = \wp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $\omega \in \Lambda$ gilt.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die algebraische Dimension der folgenden Mannigfaltigkeit: $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^n$ und $\mathbb{C}/\Lambda$, wobei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter ist.
Zeigen Sie, dass Siegels Satz für die Mannigfaltigkeit $\mathbb{C}$ nicht gilt. Also, dass $\mathrm{trdeg}_{\mathbb{C}}(K(\mathbb{C})) > 1$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Für $0 < \lambda < 1$ operieren die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ durch $(k, (z_1, \ldots, z_n)) \mapsto (\lambda^k z_1, \ldots, \lambda^k z_n)$. Zeigen Sie, dass der Quotient $X = (\mathbb{C}^n\setminus\{0\})/\mathbb{Z}$, die sogenannte *Hopf-Mannigfaltigkeit*, eine komplexe Mannigfaltigkeit und diffeomorph zu $S^1 \times S^{2n-1}$ ist.

Verallgemeinern Sie die Aussage zu Quotienten, die durch die Operation $(k, (z_1, \ldots, z_n)) \mapsto (\lambda_1^k z_1, \ldots, \lambda_n^k z_n)$ mit $0 < \lambda_j < 1$ gegeben sind.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Die *Hopf-Kurve* $X = (\mathbb{C}\backslash\{0\})/\mathbb{Z}$ ist wie ist Aufgabe 3 durch die Operation von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mittels $(k, z) \mapsto \lambda^k z$, für $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ definiert. Zeigen Sie, dass X isomorph zu einer elliptischen Kurve $\mathbb{C}/\Lambda$ ist, indem Sie eine holomorphe Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ angeben, die eine biholomorphe Abbildung auf den Quotienten induziert. Geben Sie Λ explizit an.

Abgabe Zu Beginn der Vorlesung um **10:00** am **Montag, den 12. November**.