Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2018
29. Oktober 2018

Komplexe Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. David Torres-Teigell
M.Sc. Riccardo Zuffetti

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Der Begriff der Irreduzibilität für analytische Keime verallgemeinert sich zu dem Begriff der Irreduzibilität für analytische Mengen $X \subset \mathbb{C}^n$. Das Ziel der folgenden Aufgabe ist es ein Beispiel einer irreduziblen analytischen Menge zu geben, die nicht überall irreduzible analytische Keime definiert.

Sei $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, f(z_1, z_2) := {z_1}^2 - {z_2}^2(z_2 + 1)$.

(a) Bestimmen Sie eine surjektive holomorphe Parametrisierung $\varphi : \mathbb{C} \to Z(f)$ der Nullstellenmenge $Z(f) \subset \mathbb{C}^2$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Existenz einer solchen Parametrisierung, dass $Z(f)$ irreduzibel ist.

(c) Bestimmen Sie die Punkte $P = (w_1, w_2) \in Z(f)$ an denen der Keim von $Z(f)$ in P nicht irreduzibel ist.

Kann eine analytische Menge reduzibel sein, wenn alle induzierten Keime irreduzibel sind?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \backslash \mathbb{C}^{n-2} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung. Zeigen Sie, dass eine eindeutige holomorphe Fortsetzung $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ von f auf ganz U existiert.

Hinweis:

(a) Ohne Einschränkung sei

$$\mathbb{C}^{n-2} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \,:\, z_{n-1} = z_n = 0\}.$$

Finden Sie passende Polydisks und wenden Sie Hartogs' Satz auf $f_w(z_{n-1}, z_n)$ an.

(b) Verwenden Sie das Maximumsprinzip, um zu zeigen, dass sich f auf U fortsetzen lässt.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}^n$ eine offene und zusammenhängende Teilmenge. Zeigen Sie, dass die Menge $K(U)$ der meromorphen Funktionen auf U ein Körper ist. Was ist der Zusammenhang zwischen dem Körper $K(U)$ und dem Quotientenkörper des Rings $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,z}$ für $z \in U$?

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}^n$, $V \subseteq \mathbb{C}^m$ und $f : U \to V$ holomorph, sowie $X \subset V$ eine analytische Teilmenge. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(X) \subset U$ analytisch ist. Wie hängen Irreduzibilität von X und $f^{-1}(X)$ zusammen?

Abgabe Zu Beginn der Vorlesung um **10:00** am **Montag, den 5. November**.