Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2018
22. Oktober 2018

Komplexe Algebraische Geometrie
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. David Torres-Teigell
M.Sc. Riccardo Zuffetti

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}^n$ eine offene und zusammenhängende Teilmenge. Zeigen Sie, dass für jede nichttriviale holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ das Komplement $U \backslash Z(f)$ der Nullstellenmenge von f zusammenhängend ist und dicht in U liegt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $(z_1, z_2) \mapsto z_1^3 z_2 + z_1 z_2 + z_1^2 z_2^2 + z_2^2 + z_1 z_2^3$. Finden Sie eine Zerlegung $f = h \cdot g_w$ wie im Weierstraß'schen Vorbereitungssatz, wobei h eine auf $B_\epsilon(0)$ holomorphe Funktion mit $h(0) \neq 0$ und g_ω ein Weierstraß-Polynom ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge und sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ die Nullstellenmenge $Z(f)$ nicht aus einem einzigen Punkt bestehen kann. Zeigen Sie anschließend, dass für eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $n \geq 2$ und $w \in \mathrm{Im}(f)$ für alle $c > 0$ ein $z \in f^{-1}(w)$ existiert, sodass $\|z\| > c$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Das Ziel dieser Aufgabe ist es einen Satz von Poincaré zu beweisen, nach dem der Polydisk $B_{(1,1)}(0) \subset \mathbb{C}^2$ und die Einheitskreisscheibe $D := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\| < 1\}$ nicht biholomorph zueinander sind. Der Riemann'sche Abbildungssatz lässt sich also nicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern!

(a) Zeigen Sie, dass die Gruppe der unitären Matrizen vom Rang 2

$$U(2) := \{M \in GL(2, \mathbb{C}) \mid M^\top \cdot \overline{M} = I\}$$

mit der gewöhnlichen Matrixmultiplikation als eine Untergruppe der Gruppe der biholomorphen Abbildungen auf D, die den Ursprung fixieren, aufgefasst werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass $U(2)$ versehen mit der Teilraumtopologie $U(2) \subset \mathbb{C}^4$ zusammenhängend ist.

(c) **Fakt:** Für jede biholomorphe Abbildung $f : B_{(1,1)}(0) \to B_{(1,1)}(0)$ existieren eine Permutation $\sigma \in S_2$, reelle Zahlen $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ und komplexe Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha_j| < 1$, sodass

$$f(z) = \left(e^{i\theta_1} \frac{z_{\sigma(1)} - \alpha_1}{1 - \overline{\alpha_1} z_{\sigma(1)}}, e^{i\theta_2} \frac{z_{\sigma(2)} - \alpha_2}{1 - \overline{\alpha_2} z_{\sigma(2)}} \right).$$

Sei G die Gruppe der biholomorphen Abbildungen auf $B_{(1,1)}(0)$, die den Ursprung fixieren. Diese Gruppe versehen wir mit Hilfe des Fakts mit der Teilraumtopologie von $S_2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$. Dabei ist S_2 mit der diskreten Topologie versehen. Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponente von G, die die Identität enthält, eine abelsche Untergruppe ist.

(d) Zeigen Sie, dass D und $B_{(1,1)}(0)$ nicht biholomorph zueinander sind.

Abgabe Zu Beginn der Vorlesung um **10:00** am **Montag, den 29. Oktober**.