

Skript zur Vorlesung

# **Geometrie für Lehramtskandidaten (2std.)**

**Sommersemester 2018**

Prof. Dr. Martin Möller und Prof. Dr. Jürgen Wolfart

Frankfurt am Main, 24. Juli 2018

# Inhaltsverzeichnis

1	Etwas darstellende Geometrie . . . . .	2
1.1	Eintafelprojektionen . . . . .	2
1.2	Zweitafelprojektionen . . . . .	3
1.3	Grundaufgaben im Umgang mit Grund- und Aufriss: . . . . .	3
1.4	Allgemeine Eigenschaften des Zweitafelsystems . . . . .	7
2	Trigonometrie: Kurzfassung . . . . .	9
3	Sphärische Geometrie . . . . .	15
4	Kegelschnitte . . . . .	21
5	Die Sätze von Desargues und Pappos . . . . .	39
6	Affine und projektive Ebenen . . . . .	44
7	Reelle projektive Geometrie . . . . .	53
	Literatur . . . . .	58
	Stichwortverzeichnis . . . . .	58

---

## Einleitung

Dieses Skript entstand parallel zu einer Vorlesung von Martin Möller im Sommersemester 2017 an der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main. Es basiert auf Vorlesungsausarbeitungen zu mehreren Vorlesungen von Jürgen Wolfart in früheren Semestern, sowie der Überarbeitung von Patrick Hubschmid. An der LATEXnischen Umsetzung haben Cornelia Salzmann und Jonathan Zachhuber, sowie Cristina Sarti, Claudia Baden und Christian Weiß in der Vorgängerversion, maßgeblichen Anteil.

---

# 1 Etwas darstellende Geometrie

## 1.1 Eintafelprojektionen

Die Aufgabe der darstellenden Geometrie ist die Darstellung räumlicher Figuren in einer oder mehreren Zeichenebenen. Sehr anschauliche Bilder liefert die Zentralprojektion (vgl. Abbildung (siehe Kapitel "Projektive Geometrie")). Ihr Nachteil ist, dass die entstehenden Bilder wenig maßstabgetreu sind.

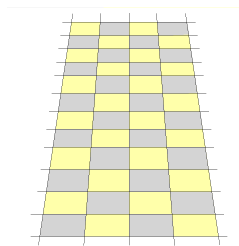


Abbildung 1.1: Fliesenboden in Zentralprojektion

Andere Projektionsmöglichkeiten sind schräge Parallelprojektionen, d.h. (lineare) Projektionen auf **einer** Zeichenebene entlang paralleler Strecken. Die Projektion ist nicht notwendig senkrecht. Insbesondere gibt es hier:

**Kavalierprojektion:** Parallelprojektion auf  $\pi''$ , so dass im Bild die  $x$ -Achse nach links unten in einem 45-Winkel verläuft und die  $x$ -Achse um den Faktor  $\frac{1}{2}$  verkürzt wird (vgl. Abbildung 1.2).

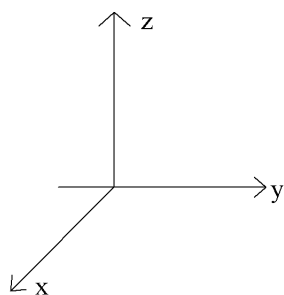


Abbildung 1.2: Kavalierprojektion

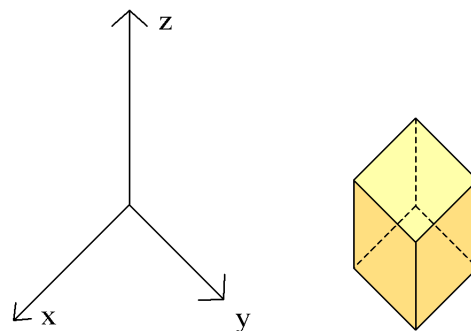


Abbildung 1.3: Militärprojektion

**Militärprojektion:** Parallelprojektion auf  $\pi'$  (um 45 gedreht), so dass das Bild der  $z$ -Achse senkrecht nach oben verläuft und die  $z$ -Achse **nicht** verkürzt ist. Alle drei Achsen werden nicht (oder im gleichen Maßstab) verkürzt (vgl. Abbildung 1.3).

---

## 1.2 Zweitafelprojektionen

Weniger anschaulich, aber besser für alle Zwecke des Messens geeignet ist die Parallelprojektion. Am besten wird die Parallelprojektion auf zwei (oder drei) senkrecht aufeinanderstehende Ebenen (**Grundriss**  $\pi'$  und **Aufriss**  $\pi''$ , vgl. Abbildung 1.4) durchgeführt. Aus den Projektionen lassen sich (fast) alle geometrischen Eigenschaften rekonstruieren.

Jeder Punkt  $P$  des  $\mathbb{R}^3$  ist durch seine Projektionsbilder  $P'$ ,  $P''$  in  $\pi'$  und  $\pi''$  eindeutig bestimmt. In der **Zweitafelprojektion** ist die Verbindungsstrecke  $P'P''$  **senkrecht** zur Bildachse, d.h. dem Schnitt von  $\pi'$  und  $\pi''$  (vgl. Abbildung 1.4).

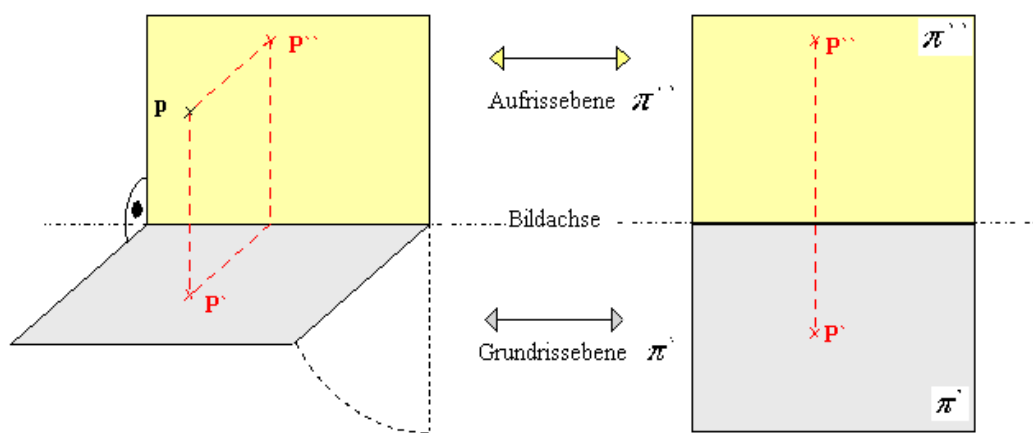


Abbildung 1.4: Darstellung eines Punktes

**Darstellung einer Geraden:** Die Verbindungsgerade zweier Punkte  $P$  und  $Q$  ist fast immer durch ihre Bilder in  $\pi'$  und  $\pi''$  eindeutig bestimmt (vgl. Abbildung 1.4). Eine Ausnahme bilden jene Geraden, die senkrecht zur Bildachse verlaufen. In diesem Fall sind die Projektionen anders zu wählen.

Sind Punkte in Koordinaten gegeben, so verwenden wir üblicherweise  $\pi'$  als die  $xy$ -Ebene,  $\pi''$  als die  $yz$ -Ebene und  $y$  als Bildachse. In Abbildung 1.5 sind die Punkte  $A = (2, 0, -1)$ ,  $B = (3, 2, 2)$ ,  $C = (0, 2, 2)$  und  $D = (-3, -2, -2)$  eingezeichnet.

**Darstellung einer Ebene:** Eine Ebene im Raum wird durch ihre Schnittgeraden mit  $\pi'$  und  $\pi''$  dargestellt. Diese werden in der anderen Ebene jeweils durch die Achse beschrieben (vgl. Abbildung 1.6). Diese Darstellung ist für Ebenen unmöglich, die parallel zu  $\pi'$  oder  $\pi''$  liegen. In diesem Fall sind wiederum die Projektion anders zu wählen.

## 1.3 Grundaufgaben im Umgang mit Grund- und Aufriss:

i) **Gegenseitige Lage zweier räumlicher Geraden  $g$  und  $h$  bestimmen:**

Es gibt genau 3 Möglichkeiten:  $g$  und  $h$  schneiden sich oder sie sind parallel oder sie

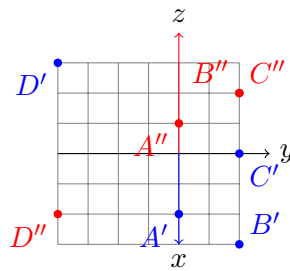


Abbildung 1.5: Punkte in Koordinaten

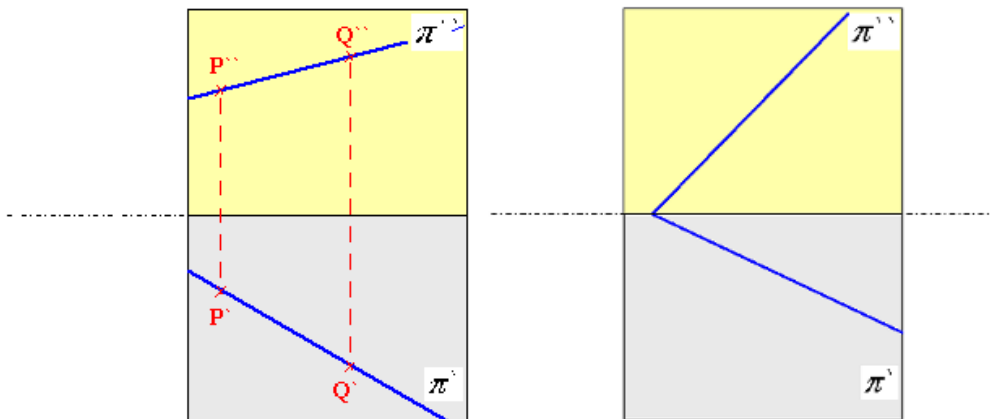


Abbildung 1.6: Darstellung einer Geraden und einer Ebene

sind **windschief** (d.h. sie schneiden sich nicht, sind aber auch nicht parallel). Im allgemeinen ist an Grund- und Aufriss ablesbar, welche dieser Möglichkeiten eintritt, wenn wir **annehmen**, dass  $g', g'', h', h''$  nicht senkrecht zur Bildachse sind. Dann gilt (vgl. Abbildung 1.7):

- Die Geraden  $g$  und  $h$  sind parallel genau dann wenn  $g', h'$  parallel sind und  $g'', h''$  parallel sind.
- Die Geraden  $g$  und  $h$  genau dann wenn sich  $g'$  und  $h'$  schneiden, sich  $g''$  und  $h''$  schneiden sich, und die Verbindungsstrecke der Schnittpunkte **senkrecht zur Bildachse** liegt.
- In allen anderen Fällen sind  $g, h$  windschief.

ii) **Schnittpunkt einer Geraden  $g$  mit einer Ebene bestimmen.**

Die Ebene sei durch ein Dreieck  $ABC$  gegeben. Betrachte jetzt die Hilfsebene  $e$ , die sowohl die Gerade  $g$  als auch ihre Projektion auf  $\pi'$  enthält. Diese schneidet die Gerade  $AC$  in  $E$  und  $AB$  in  $D$  (vgl. Abbildung 1.8). Die Verbindungsstrecke  $\overline{ED}$  liegt im Dreieck und schneidet  $g$  im Durchstoßpunkt.

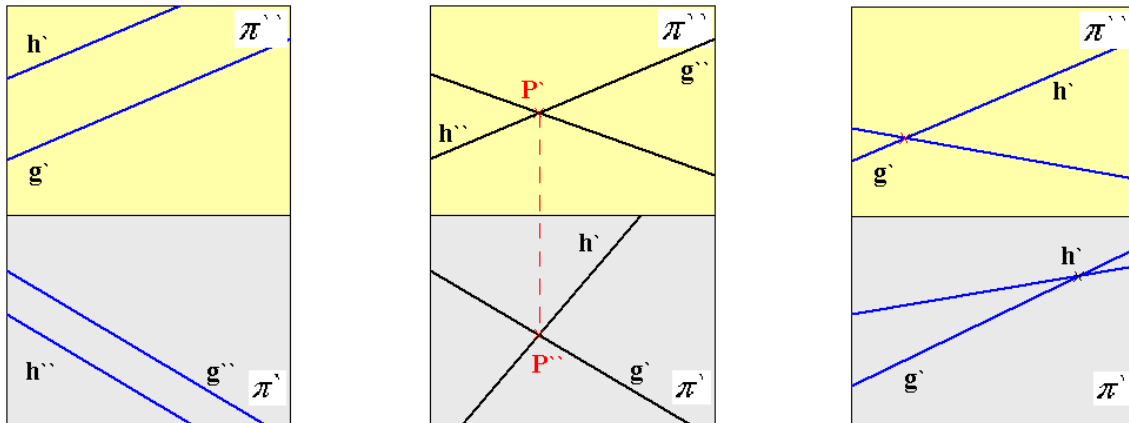


Abbildung 1.7: Relative Lage zweier Geraden

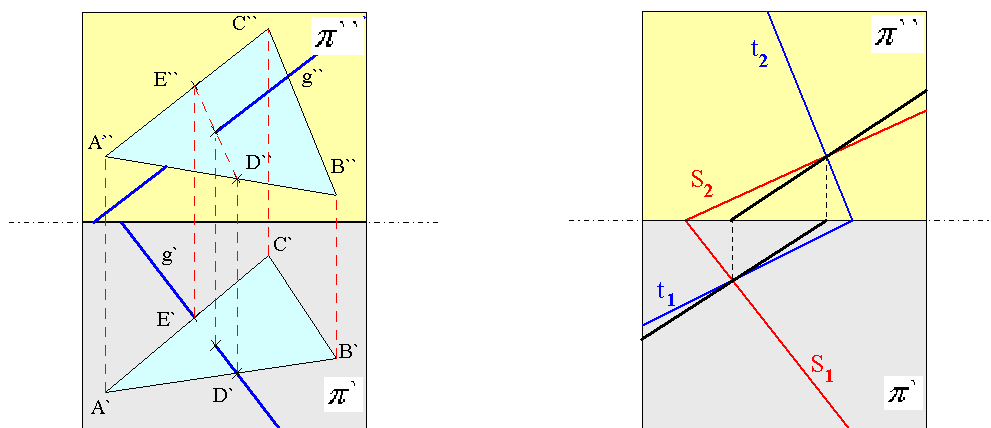


Abbildung 1.8: Schnitt einer Ebene mit einer Geraden (links) und einer Ebene (rechts)

iii) **Schnittgerade von zwei Ebenen bestimmen.** Beide Ebenen seien gegeben durch ihre Schnittgeraden  $s_1, s_2$  bzw.  $t_1, t_2$  mit  $\pi'$  und  $\pi''$  (vgl. Abbildung 1.8). Die Schnittgerade der Ebenen ist durch die beiden Schnittpunkte von  $s_1 \cap t_1$  (in der Grundrissebene  $\pi'$ ) und  $s_2 \cap t_2$  (in der Aufrissebene  $\pi''$ ) gegeben. Diese brauchen einfach nur verbunden zu werden.

Variante: Bei der Durchdringung zweier Dreiecke wende man Verfahren (ii) auf die Randstrecken an!

iv) **Wahre Größe einer ebenen Figur bestimmen.** Die Grundidee ist, die Figur in eine zu

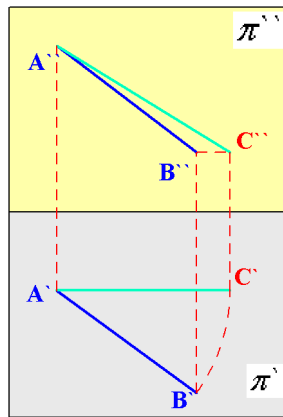


Abbildung 1.9: Monge-Drehung zur Längenbestimmung

$\pi'$  oder  $\pi''$  parallele Ebene drehen. Der Grund- bzw. Aufriss der gedrehten Figur zeigt die Figur in ihrer wahren Größe.

Zunächst bestimmen wir die Drehung für eine einzelne Strecke  $AB$ : Die Strecke wird um eine Achse durch  $A$  gedreht, welche senkrecht auf  $\pi'$  steht. Sie wird gedreht, bis sie mit einer Strecke  $\overline{AC}$  übereinstimmt, die parallel zu  $\pi''$  (und damit parallel zur Bildachse) liegt (vgl. Abbildung 1.9). Nun gilt für die Streckenlängen  $|\overline{AC''}| = |\overline{AC'}| = |\overline{AB}|$  (Eine solche Drehung in Grund und Aufriss wird Monge-Drehung genannt).

Bei einem Dreieck wird es komplizierter (vgl. Abbildung 1.10): Wir starten mit dem Dreieck  $ABC$ , dessen Zweitafelprojektion in Abbildung 1.10 gegeben ist.

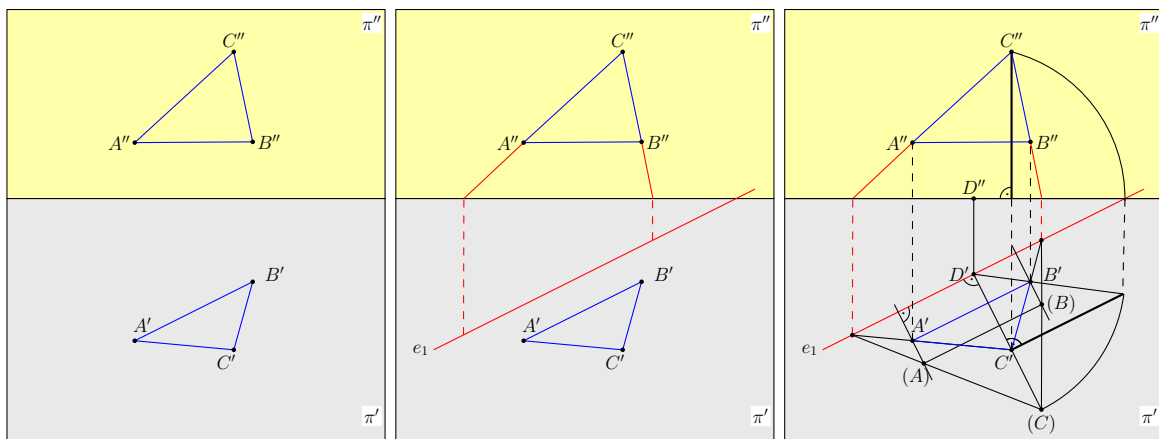


Abbildung 1.10: Wahre Größe eines Dreiecks ABC bestimmen

Konstruiere zunächst die Schnittgerade  $e_1 = e'_1$  der Dreiecksebene mit  $\pi'$ . Dies ist die Verbindungsgerade der Schnittpunkte  $AB \cap \pi'$ , die wir (wie in Abbildung 1.10 gezeigt) konstruieren. Diese ist unsere Drehachse. Wir drehen das Dreieck, sodass es nach Drehung in  $\pi'$  liegt. Als erstes bestimmt man den Punkt  $D$ , den Schnitt der Geraden  $e_1$  mit



der Ebene, in der alle Bilder von  $C$  unter einer  $e_1$ -Drehung liegen. Dessen Zweitafelprojektion ist gegeben durch den Punkt auf  $e_1$ , durch den das Lot auf  $e_1$  durch  $C'$  verläuft. Nun konstruieren wir den Bildpunkt  $(C)$  von  $C$ . Dieser liegt auf der Senkrechten zu  $e_1$  durch  $C'$ , so dass der Abstand von  $(C)$  zu  $e_1$  gleich dem Abstand von  $C$  zu  $e_1$  ist. Dazu muss die wahre Länge von  $CD$  durch Drehung von  $CD$  in  $\pi'$  um die Achse  $C'D'$  bestimmt werden. Ähnlich geht man jetzt bei  $A$  und  $B$  vor, um die Bildpunkt  $(A)$  und  $(B)$  unter der gleichen Drehung zu bestimmen. Man sieht in  $\pi'$  das Dreieck  $ABC$  dann in seiner wahren Größe als das Dreieck  $(A)(B)(C)$ .

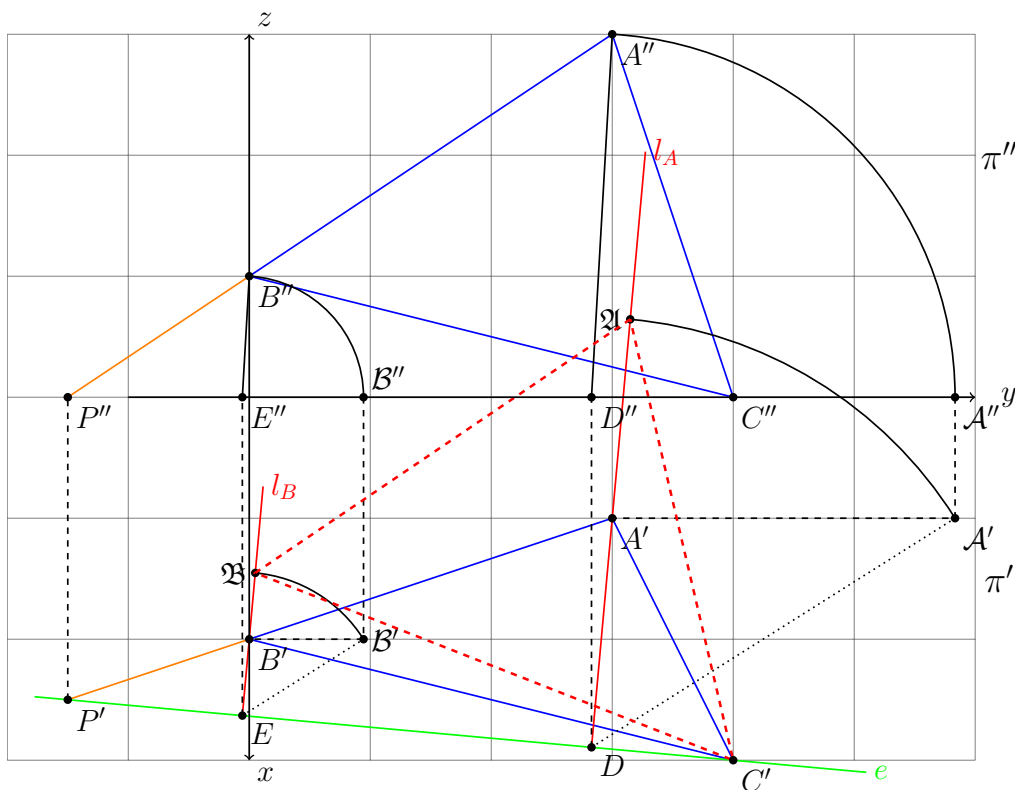


Abbildung 1.11: Wahres Dreieck, ein Punkt  $C$  in der Grundrissebene

In der Abbildung 1.11 ist ein zweites Beispiel zur Bestimmung der wahren Größe eines Dreiecks  $ABC$  gegeben. In diesem Fall liegt der Punkt  $C$  bereits in der Grundrissebene. Zur Bestimmung der Drehgeraden  $e$ , welche durch  $C$  gehen muss, genügt es einen weiteren Punkt  $P$  zu bestimmen. Dieser ist der Schnittpunkt der Gerade  $AB$  mit der Grundrissebene  $\pi'$ .

#### 1.4 Allgemeine Eigenschaften des Zweitafelsystems

Wir fassen zusammen:

- Parallele Geraden sind auch in Grund- und Aufriss parallel.
- Ebene Figuren erscheinen im Grundriss nur in ihrer wahren Größe, wenn sie parallel zu  $\pi'$  sind (gilt auch für Strecken).
- Ebene Figuren erscheinen im Aufriss nur in ihrer wahren Größe, wenn sie parallel zu  $\pi''$  sind (gilt auch für Strecken).
- Andere Strecken sind im Grund- und Aufriss gekürzt, parallele Strecken sind im gleichen Verhältnis gekürzt.
- Auf einer Ebene im Raum liegende Kreise werden in der Projektion zu Ellipsen, wobei die große Halbachse in  $\pi'$  Bild eines Kreisdurchmessers ist, der parallel zu  $\pi'$  liegt (vgl. Abbildung 1.12).

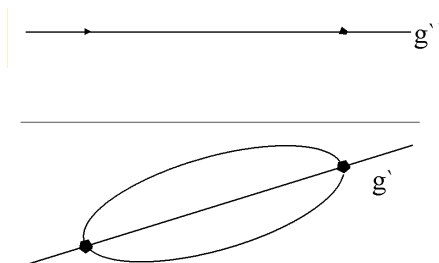


Abbildung 1.12: Projektion eines Kreises

#### Aufgabe 1.1 (4 Punkte)

Wir wählen im  $\mathbb{R}^3$  die Grundrissebene  $\pi' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$  und die Aufrissebene  $\pi'' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ , sowie die Punkte

$$\begin{array}{lll} A = (0, 0, 0), & B = (1, 1, 1), & C = (1, 2, 3), \\ D = (2, 3, 4), & E = (1, 0, 1), & F = (0, 1, 0). \end{array}$$

Bestimmen Sie die Grund- und Aufrisszeichnungen der Geraden  $AB$ ,  $CD$  und  $EF$  und bestimmen Sie anhand dieser Zeichnungen die gegenseitige Lage der drei Geraden.

#### Aufgabe 1.2 (4 Punkte)

Gegeben seien die Punkte  $A = (0, 1, 0)$ ,  $B = (3, 2, 4)$ ,  $C = (2, 5, 1)$ ,  $D = (2, 4, 2)$  und  $E = (0, 0, 0)$  im  $\mathbb{R}^3$ .

Konstruieren Sie den Schnittpunkt der Ebene  $ABC$  mit der Gerade  $DE$ .

#### Aufgabe 1.3 (4 Punkte)

Wir wählen im  $\mathbb{R}^3$  die Grundrissebene  $\pi' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$  und die Aufrissebene  $\pi'' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$ , sowie ein Dreieck mit den Ecken  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (1, 0, 1)$  und  $C = (2, 1, 0)$ .

Bestimmen Sie zunächst die Zweitafelprojektion des Dreiecks  $ABC$  und konstruieren Sie es dann in wahrer Größe. Ist das Dreieck rechtwinklig?

**Aufgabe 1.4 (4 Punkte)**

Gegeben sei ein Tetraeder  $T$  mit den Ecken  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (1, 2, 0)$ ,  $C = (1, 1, 1)$  und  $D = (0, 3, 2)$ .

Zeichnen Sie  $T$  in Kavalier- und Militärprojektion.

## 2 Trigonometrie: Kurzfassung

Wir wiederholen zunächst wichtige Eigenschaften von trigonometrischen Funktionen.

Sei  $\varphi$  ein Winkel im Bogenmaß. Betrachte den Punkt  $(x, y)$  auf dem Einheitskreis, so dass die Strecke von 0 nach  $(x, y)$  den Winkel  $\varphi$  zur positiven x-Achse einschließt (vgl. Abbildung 2.1).

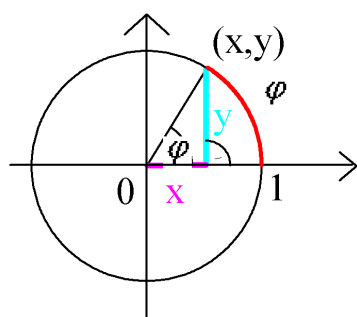


Abbildung 2.1

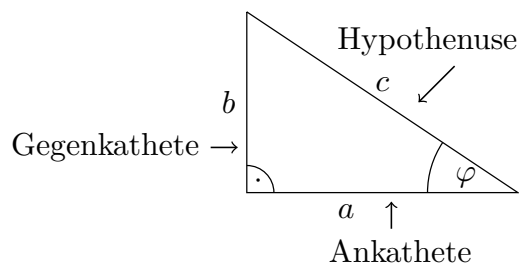


Abbildung 2.2

Dann ist  $\cos \varphi = x$  und  $\sin \varphi = y$ . Punkte auf dem Einheitskreis erfüllen  $x^2 + y^2 = 1$ . Es gilt folglich  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ . Für spitze Winkel  $\varphi$  ist auch die Definition

$$\cos \varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \sin \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

brauchbar (vgl. Abbildung 2.2). Dabei misst  $\varphi$  den Winkel zweckmäßigerweise im Bogenmaß (vgl. Abbildung 2.3), denn nur im Fall des Bogenmaßes erhält man bequeme Formeln zum Differenzieren der Funktionen:

$$\cos' \varphi = -\sin \varphi \quad \text{und} \quad \sin' \varphi = \cos \varphi$$

Daraus folgt  $\cos'' \varphi = -\cos \varphi$  und  $\sin'' \varphi = -\sin \varphi$ . Diese Regeln sind fundamental für die Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung  $f'' + f = 0$  der Physik.

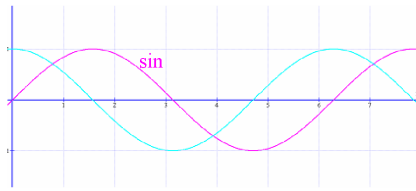


Abbildung 2.3

Wichtige Werte sind

$$\begin{array}{ll}
 \sin 0 = 0 & \cos 0 = 1 \\
 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} & \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\
 \sin \frac{\pi}{2} = 1 & \cos \frac{\pi}{2} = 0 .
 \end{array}$$

Diese leitet man elementar aus den Eigenschaften des rechtwinkligen und des gleichseitigen Dreiecks her. Weitere Werte können durch Symmetrieeigenschaften abgeleitet werden, z.B.  $\sin \varphi = \cos(\varphi - \frac{\pi}{2})$ ,  $\sin(\varphi) = -\sin(-\varphi)$ ,  $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$ . Andere trigonometrische Funktionen sind

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{b}{c} \cot \varphi = \frac{a}{b} = \frac{1}{\tan \varphi} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} .$$

Dabei ist  $\tan \varphi$  definiert für  $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  und  $\cot \varphi$  ist definiert für  $\varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Die Trigonometrie ist der Anfang der „rechnenden Geometrie“.

**Satz 2.1** Im Dreieck mit Strecken der Längen  $a, b, c$  und gegenüberliegenden Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  gelten

i) der **Cosinussatz**:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  und

ii) der **Sinusatz**:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$  .

**Beweis** : Der Cosinussatz ist für  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  gerade der Satz des Pythagoras. Für  $\gamma < \frac{\pi}{2}$  unterteile man das Dreieck durch die Höhe auf  $b$  der Länge  $h_b = a \sin \gamma$  (vgl. Abbildung 2.4) und wende den Satz von Pythagoras an. Dann folgt

$$c^2 = (b - a \cos \gamma)^2 + (a \sin \gamma)^2 = b^2 - 2ab \cos \gamma + a^2(\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) .$$

Ein ähnlicher Beweis funktioniert auch für  $\gamma > \frac{\pi}{2}$ , auch wenn in diesem Fall die Höhe  $h_b$  außerhalb des Dreiecks liegt.

Wir nehmen wiederum an, dass  $\gamma < \frac{\pi}{2}$  ist. Dann folgt wieder aus der Dreiecksunterteilung in Abbildung 2.4, dass  $h_b = a \sin \gamma = c \sin \alpha$ . Daraus folgt  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$ . □

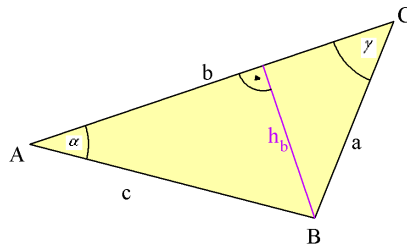


Abbildung 2.4: Höhe  $h_b$  zum Beweis des Cosinussatzes.

Aus dem Cosinussatz ergeben sich folgende Konsequenzen. Zum einen gilt die Umkehrung des Satzes von Pythagoras.

$c^2 = a^2 + b^2$  impliziert  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , denn aus  $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  und der Voraussetzung folgt  $\cos \gamma = 0$  und somit  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ .

Zum anderen gibt es viele Berechnungsmöglichkeiten für konstruktive Probleme der Geometrie, z.B.: Gibt es Dreiecke mit vorgegebenen Größen  $\alpha, c, a$ ? Wenn ja, wieviele?

Aus Satz 2.1 erhalten wir eine quadratische Gleichung für  $b$  mit Lösungen

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \Leftrightarrow b = c \cos \alpha \pm \sqrt{(c \cos \alpha)^2 - c^2 + a^2} \\ &\Leftrightarrow b = c \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 \alpha}, \end{aligned}$$

Also folgt.

- Es geht keine Lösung für  $a < c \sin \alpha$ .
- Es gibt genau eine Lösung für  $a = c \sin \alpha$ , nämlich  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ,
- Es gibt zwei Lösungen für  $a > c \sin \alpha$ ; dabei ist die eine der beiden irrelevant, wenn  $a^2 - c^2 \sin^2 \alpha > c^2 \cos^2 \alpha$  ist, also genau dann, wenn  $a^2 > c^2$  ist, bzw. genau dann, wenn  $\alpha$  der größeren Seite gegenüber liegt.

**Satz 2.2** (Additionstheoreme) Für alle Winkel  $\alpha, \varphi$  gilt

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \varphi) &= \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi \\ \sin(\alpha + \varphi) &= \sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi. \end{aligned}$$

**Beweis :** Wir stellen die Winkeladdition am Einheitskreis (vgl. Abbildung 2.5) dar. Das Dreieck  $\triangle(O, A, B)$  hat eine Hypotenuse der Länge 1 und Kanten der Längen  $\cos \alpha$  und  $\sin \alpha$ , d.h.  $B = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  und  $A$  ist die senkrechte Projektion von  $B$  auf die x-Achse. Sei  $O' = (\cos(\alpha + \varphi), \sin(\alpha + \varphi))$  und  $B'$  ist der Punkt, den man erhält, indem man  $O'$  senkrecht auf  $OB$  projiziert.  $A'$  schließlich sei der Punkt mit gleicher y-Koordinate wie  $B'$  und gleicher

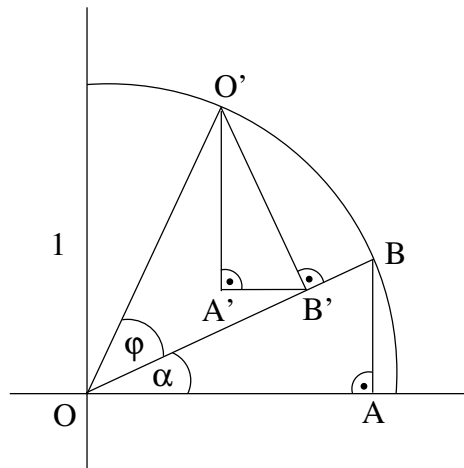


Abbildung 2.5

x-Koordinate wie  $O'$ .

Die Grundidee ist, dass die Dreiecke  $OAB$  und  $O'A'B'$  die gleichen Winkel haben. Darum sind sie ähnlich, d.h.  $O'A'B'$  ist  $OAB$  gedreht, um  $\frac{\pi}{2}$  und um einen Faktor  $t$  skaliert, wobei

$$t = \frac{|O'A'|}{|OA|} = \frac{|O'B'|}{|OB|} = \frac{|A'B'|}{|AB|}.$$

Wir wissen  $|OA| = \cos \alpha$ ,  $|AB| = \sin \alpha$ ,  $|OB| = 1$  und  $|O'B'| = \sin \varphi$ . Daraus folgt  $t = \sin \varphi$ . Setzen wir nun ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} |A'B'| &= t|AB| = \sin \alpha \sin \varphi \\ |O'A'| &= t|OA| = \cos \alpha \sin \varphi. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$O' = B' + (-\sin \alpha \sin \varphi, \cos \alpha \sin \varphi).$$

Andererseits ist

$$B' = \frac{|OB'|}{|OB|} \cdot B = \frac{\cos \varphi}{1} B = (\cos \varphi \cos \alpha, \cos \varphi \sin \alpha).$$

So erhalten wir:

$$O' = (\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi, \sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi).$$

Durch Vergleich mit den oben gegebenen Koordinaten von  $O'$  folgt die Behauptung.  $\square$

#### Anwendung: Grund-Techniken der Landvermessung:

- **Vorwärtsschneiden:** Die Seitenlängen  $b, c$  und der Winkel  $\alpha$  seien gemessen (vgl. dazu Abbildung 2.6). Durch Winkelmessung an den Standpunkten  $B$  und  $C$  sollen alle

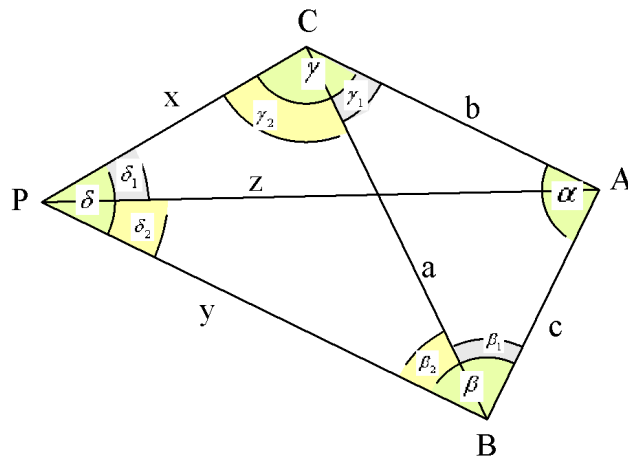


Abbildung 2.6

anderen Längen und Winkel, die in Abbildung 2.6 angedeutet sind, bestimmt werden. Dabei ist zunächst

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

nach dem Kosinussatz bekannt. Es genügt  $\beta$  und  $\gamma$  zu messen, denn es gilt

$$\begin{aligned} \sin \beta_1 &= \frac{b}{a} \sin \alpha, & \sin \gamma_1 &= \frac{c}{a} \sin \alpha, \\ \beta_2 &= \beta - \beta_1, & \gamma_2 &= \gamma - \gamma_1, & \delta &= \pi - \gamma_2 - \beta_2, \\ x &= a \frac{\sin \beta_2}{\sin \delta}, & y &= a \frac{\sin \gamma_2}{\sin \delta}, \end{aligned}$$

$$z = \sqrt{b^2 + x^2 - 2bx \cos \gamma} = \sqrt{c^2 + y^2 - 2cy \cos \beta}.$$

- **Rückwärtsschneiden:** Nun seien  $b, c, \alpha$  und die Winkel  $\delta_1$  und  $\delta_2$  von  $P$  aus gemessen. Die Größen  $a, \beta_1, \gamma_1$  lassen sich wie oben berechnen. Weiter gilt nach dem Sinussatz

$$\frac{z}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \delta_2}, \quad \frac{z}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \delta_1} \quad \text{und daher} \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b \sin \delta_2}{c \sin \delta_1}.$$

Wir setzen  $\varphi := \beta + \gamma = 2\pi - (\alpha + \delta)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\sin \beta}{\sin(\varphi - \beta)} &= \frac{b \sin \delta_2}{c \sin \delta_1} \Rightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \varphi \cos \beta - \cos \varphi \sin \beta} = \frac{b \sin \delta_2}{c \sin \delta_1} \\ &\Rightarrow \sin \beta (c \sin \delta_1 + b \sin \delta_2 \cos \varphi) = b \sin \varphi \cos \beta \sin \delta_2 \end{aligned}$$

Der Winkel  $\beta$  wird also durch

$$\tan \beta = \frac{b \sin \varphi \sin \delta_2}{c \sin \delta_1 + b \sin \delta_2 \cos \varphi}$$

---

berechnet. Entsprechend verläuft die Berechnung von  $\gamma = \varphi - \beta$ , und daraus ergeben sich  $x, y, z$  nach

$$z = c \frac{\sin \beta}{\sin \delta_2}, \quad y = c \frac{\sin(\pi - \delta_2 - \beta)}{\sin \delta_2}, \quad x = b \frac{\sin(\pi - \delta_1 - \gamma)}{\sin \delta_1}.$$

### Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

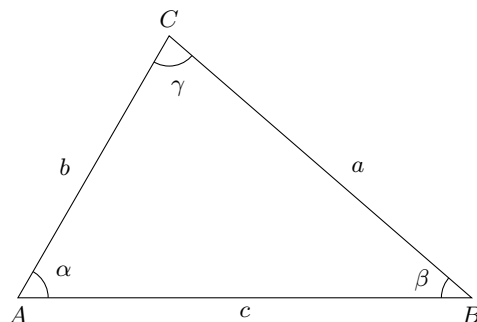
Berechnen Sie die Längen aller Diagonalen

- des regelmäßig in den Einheitskreis einbeschriebenen Sechsecks; und
- des regelmäßig in den Einheitskreis einbeschriebenen Fünfecks.

*Hinweis:* Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme:  $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ .

### Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

Gegeben sei ein Dreieck  $\Delta$  mit folgenden Bezeichnungen:



- Nun wählen wir  $\Delta$  mit Seitenlängen

$$a = \sqrt{12}, \quad b = 4, \quad c = 2.$$

Bestimmen Sie die (exakten) Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  im Bogenmaß und berechnen Sie den Flächeninhalt von  $\Delta$ .

- Nun wählen wir wieder  $\Delta$  mit Seitenlängen  $a = \sqrt{12}$  und  $b = 4$ .

Wie lang darf die Seite  $c$  höchstens sein, damit der Winkel  $\gamma$  spitz, d.h.  $\gamma < \frac{\pi}{2}$ , ist?

### Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Finden Sie alle  $0 \leq \alpha < 2\pi$ , so dass

- $\sin(2\alpha) + 2 \sin \alpha = 0$ ;
- $1 + \cos \alpha + \cos(2\alpha) + \cos(3\alpha) = 0$ .



---

### Aufgabe 2.4 (4 Punkte)

Sei  $\Delta$  ein ebenes Dreieck,  $\mathcal{A}$  sein Flächeninhalt,  $a, b, c$  die Seitenlängen von  $\Delta$  und  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ . Sei weiterhin  $\gamma$  der Winkel zwischen den Kanten mit Länge  $a$  und  $b$ .

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Formel  $\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  zu zeigen.

i) Zeigen Sie, dass  $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$  ist.

ii) Zeigen Sie:  $\sin \gamma = \sqrt{\left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)}$ .

iii) Folgern Sie, dass  $\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  ist.

## 3 Sphärische Geometrie

Bisher haben wir die Geometrie in der Euklidischen Ebene und im Euklidischen Raum studiert. Hier sind die kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten **gerade** Strecken (vgl. Abbildung 3.1).

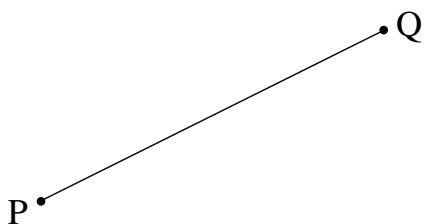


Abbildung 3.1

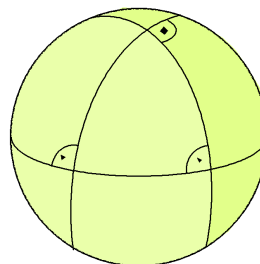


Abbildung 3.2

In diesem Kapitel wollen wir nun die Geometrie auf der Kugeloberfläche (Sphäre) betrachten.

**Satz 3.1** *Kürzeste Verbindungslinien auf der Kugeloberfläche sind **Großkreise** (vgl. Abbildung 3.2), d.h. Schnitte der Kugeloberfläche mit Ebenen durch den Kugelmittelpunkt.*

**Bemerkungen 3.2** i) Der Beweis von Satz 3.1 geschieht durch lokale Approximation der Oberfläche durch ihre Tangentialebenen. Dort sind Strecken die kürzesten Verbindungslinien.

ii) Die Großkreise werden also auch **sphärische Geraden** genannt.

- 
- iii) Zwei nicht entgegengesetzte Punkte  $P, Q$  auf der Kugel besitzen eine kürzeste Verbindungslinie:  $P, Q$  und der Sphärenmittelpunkt  $M$  definieren eine Ebene, deren Schnitt mit der Kugel ein Großkreis ist. Die kürzeste Verbindung von  $P$  und  $Q$  liegt auf diesem Großkreis (der kürzere der beiden Kreisbögen). Wir bezeichnen diese kürzeste Verbindung von Punkt  $Q$  durch  $\widehat{PQ}$ .
  - iv) Zwei entgegengesetzte Punkte  $P, Q$  (Antipoden) besitzen unendlich viele kürzeste Verbindungen, weil  $M, P, Q$  auf einer Geraden in  $\mathbb{R}^3$  liegen und somit unendlich viele Ebenen durch  $M, P, Q$  gehen.
  - v) Es gibt keine parallelen Geraden: je zwei verschiedene sphärische Geraden haben zwei (entgegengesetzte) Schnittpunkte.
  - vi) Der Winkel zwischen Geraden ist gleich dem Winkel zwischen dem Winkel der Tangenten am Schnittpunkt der Großkreise und ebenfalls gleich Winkel zwischen jenen Ebenen durch den Kugelmittelpunkt, welche die Geraden enthalten.
  - vii) Die Länge einer sphärischen Strecke ist definiert als die Länge des Abrollens der Strecke auf eine Tangentialebene. Zur Berechnung einer solchen Länge betrachten wir zunächst eine Kugel mit Radius 1 (vgl. Abbildung 3.3). Die Länge ist dann definiert als der Winkel  $\varphi$  im Bogenmaß auf dem verbindenden Großkreis. Wir schreiben  $|\widehat{PQ}| = \varphi$ . Die Länge auf der Kugel vom Radius  $r$  erhält man durch Multiplikation des Winkels  $\varphi$  mit dem Radius  $r$ .

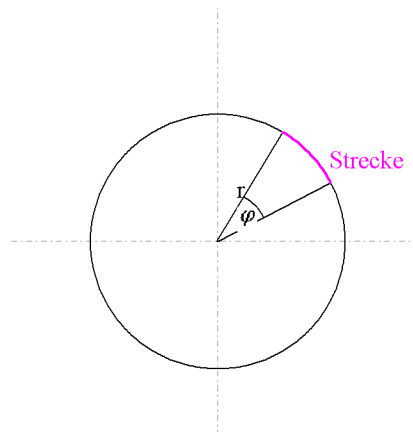


Abbildung 3.3

- viii) Zu jedem Großkreis  $G$  gehören zwei **Pole**  $C$  und  $C_2$ : Dies sind Schnittpunkte der Achse durch den Kugelmittelpunkt, die auf der Großkreisebene senkrecht steht. Umgekehrt gehört zu jedem Paar diametral gegenüberliegender Punkte  $C_1$  und  $C_2$  eine **Polare**  $G$ , d.h. ein Großkreis, deren Pole die beiden Punkte sind (vgl. Abbildung 3.5). Man spricht auch von der 'Polare zu  $C_1$ ', da der gegenüberliegende Punkt  $C_2$  durch  $C_1$  bereits eindeutig festgelegt ist.

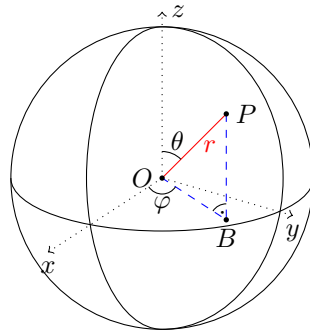


Abbildung 3.4: Kugelkoordinaten des Punktes  $P = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ .

- ix) Auf der Einheitskugel ist der Winkel zwischen zwei Geraden gerade der sphärische Abstand ihrer Pole.

Neben den gewöhnlichen kartesischen Koordinaten bietet es sich in der sphärischen Geometrie oft an, Punkte durch ihre Entfernung zum Ursprung und zwei Winkel zu charakterisieren. Dies wird durch *sphärische* bzw. *Kugelkoordinaten* präzisiert.

**Lemma 3.3** *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R}_{>0} \times (0, \pi) \times [0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\} \\ (r, \theta, \varphi) &\longmapsto (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \end{aligned}$$

ist bijektiv.

**Beweis :** Die Aussage folgt leicht durch Betrachten von Abbildung 3.4: Der Abstand vom Kugelmittelpunkt  $O$  zur Projektion von  $P$  auf die  $xy$ -Ebene ist gerade  $\sin \theta$ , woraus sich die Formeln für die Koordinaten ergeben.  $\square$

Lemma 3.3 erlaubt uns einen Punkt in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$  mit seinem Urbild, den Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \varphi)$  zu identifizieren. Dies lässt sich auf ganz  $\mathbb{R}^3$  erweitern, indem wir Punkten  $(0, 0, z)$  mit  $z > 0$  die Koordinate  $(z, 0, 0)$ , den Punkten  $(0, 0, z)$  mit  $z < 0$  die Koordinate  $(-z, \pi, 0)$  und dem Nullpunkt die Koordinate  $(0, 0, 0)$  zuordnen.

Jetzt betrachten wir **sphärische Dreiecke**, also Dreiecke, die durch drei Großkreisbögen begrenzt werden. In sphärischen Dreiecken gilt nicht der Satz aus der ebenen (Euklidischen Geometrie), daß die Summe der Innenwinkel gleich  $\pi$  beträgt. (Zeichnen Sie ein sphärisches Dreieck mit Innenwinkelsumme  $3\pi/2$ )

**Satz 3.4** (*Seiten-Cosinussatz*) Für ein sphärisches Dreieck auf der Einheitskugel mit Seitenlängen kleiner gleich  $\frac{\pi}{2}$  und Winkeln, wie in Abbildung 3.6 angegeben, gilt

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma .$$

Für sphärische Dreiecke auf Kugeln von beliebigem Radius sind die Längen  $a, b, c$  zunächst durch den Kugelradius  $r$  zu dividieren, vgl. Bemerkung 3.2

**Beweis:** Sei  $p$  die Polare zu  $C$ , d.h.  $\widehat{AC}$  und  $\widehat{BC}$  sind Lote auf  $p$ , die  $p$  in  $N$  bzw.  $M$  schneiden. Für die sphärischen Längen gilt dann

$$\left| \widehat{MN} \right| = \gamma \quad \text{und} \quad \left| \widehat{CM} \right| = \left| \widehat{CN} \right| = \frac{\pi}{2} \quad (\text{vgl. Abbildung 3.6}).$$

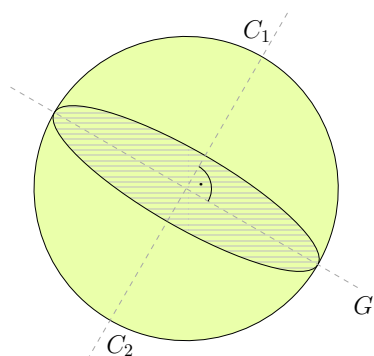


Abbildung 3.5: Pole zwischen einem Großkreis

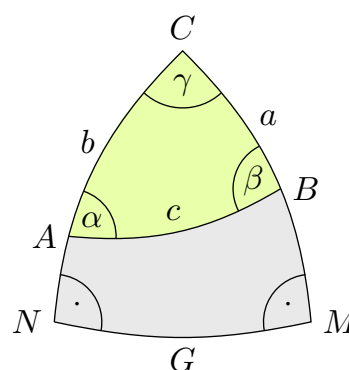


Abbildung 3.6: Bezeichnungen im sphärischen Dreieck

Gesucht ist also der wahre Winkel  $\angle AOB$ , welcher gleich der Länge der Seite  $c$  ist. Dazu verwenden wir sphärische Koordinaten (vgl. Abbildung 3.7 und 3.8).

$$\begin{array}{ll} 0 &= (0, 0, 0) & A &= (\sin b, 0, \cos b) \\ N &= (1, 0, 0) & M &= (\cos \gamma, \sin \gamma, 0) \\ C &= (0, 0, 1) & B &= (\sin a \cos \gamma, \sin a \sin \gamma, \cos a) \end{array}$$

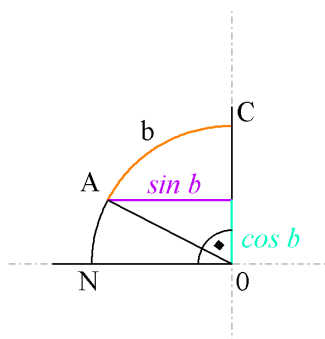


Abbildung 3.7: Ebene des Großkreises  $b$

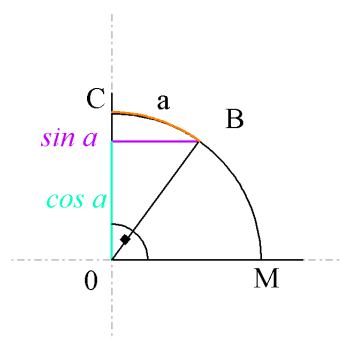


Abbildung 3.8: Ebene des Großkreises  $a$

---

Nun berechnet man die euklidischen Abstände in  $\mathbb{R}^3$ .

$$1 = |\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = |\overline{ON}| = |\overline{OM}| ,$$
$$|\overline{AB}|^2 = (\sin a \cos \gamma - \sin b)^2 + \sin^2 a \sin^2 \gamma + (\cos a - \cos b)^2 ,$$

Man wendet den ebenen Cosinussatz auf das Dreieck  $\triangle OAB$  an und erhält

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2 |OA| |OB| \cos c = 2 - 2 \cos c .$$

Nun setzen wir ein.

$$\begin{aligned} 2 \cos c &= 2 - (\sin a \cos \gamma - \sin b)^2 - \sin^2 a \sin^2 \gamma - (\cos a - \cos b)^2 \\ &= 1 - \sin^2 a \cos^2 \gamma + 2 \sin a \sin b \cos \gamma - \sin^2 a \sin^2 \gamma - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \\ &= 2 \sin a \sin b \cos \gamma + 2 \cos a \cos b . \end{aligned}$$

□

**Satz 3.5** (Winkel-Cosinussatz): *Unter den gleichen Voraussetzungen gilt:*

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c .$$

**Beweis :** Ähnlich zum Beweis von Satz 3.4 oder durch Übergang zum polaren Dreieck. □

**Satz 3.6** (sphärischer Sinussatz) *Unter den gleichen Voraussetzungen gilt*

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} .$$

**Beweis :** Aus Satz 3.4 folgt

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} \quad \text{und damit} \quad \sin^2 \gamma = \frac{x^2}{\sin^2 a \sin^2 b}$$

wobei

$$\begin{aligned} x^2 &= \sin^2 a \sin^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a \cos^2 b + 2 \cos a \cos b \cos c \\ &= 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c . \end{aligned}$$

Dieser Wert ändert sich nicht durch zyklische Vertauschung von  $a, b, c$  bzw.  $\alpha, \beta, \gamma$ , also ist

$$x^2 = \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 \gamma = \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 \alpha = \sin^2 c \sin^2 a \sin^2 \beta .$$

Die Division durch  $\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c$  liefert die Behauptung bis auf das Vorzeichen. Dieses stimmt offensichtlich für Dreiecke mit Winkeln und Seiten  $< \pi$ . □

---

Es gibt allgemeinere Versionen und viele andere schöne Sätze, zum Beispiel:

**Folgerung:** Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist mit  $\gamma = \frac{\pi}{2}$

$$\cos c = \cos a \cos b .$$

**Satz 3.7** Der Flächeninhalt  $F$  des sphärischen Dreiecks mit Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  ist also insbesondere  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$  im Gegensatz zur euklidischen Geometrie

$$F = \alpha + \beta + \gamma - \pi .$$

**Beweis :** Wie immer ist die Sphäre auf Radius 1 normiert und ihre Gesamtfläche ist, wie man in der Analysis zeigt, gleich  $4\pi$ . D.h. die Fläche eines Zweiecks, berandet von zwei Großkreisen mit Winkel  $\alpha$ , ist  $2\alpha$  (vgl. Abbildung 3.9). Dies sieht man zum Beispiel durch Unterteilung des vollen Winkels in gleiche Teile, falls  $\alpha$  rational ist, bzw. im allgemeinen Fall durch Grenzübergang.

Sei  $Z_\alpha$  das zu  $\alpha$  gehörige Zweieck und sei analog  $Z_\beta, Z_\gamma$  (vgl. Abbildung 3.10). Wir betrachten nun die Halbkugel  $H$ , die durch  $\alpha$  begrenzt wird und die das Dreieck  $D = \triangle ABC$  enthält. Dann gilt

$$H = Z_\beta \dot{\cup} (Z_\gamma \setminus D) \dot{\cup} (Z_\alpha \setminus D)$$

wobei  $\dot{\cup}$  die disjunkte Vereinigung bezeichnet. Weil die Fläche von  $H$  gleich  $2\pi$  ist, folgt

$$2\pi = 2\beta + 2\gamma - F + 2\alpha - F$$

und somit die Behauptung. □

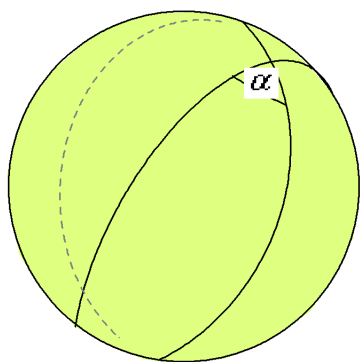


Abbildung 3.9

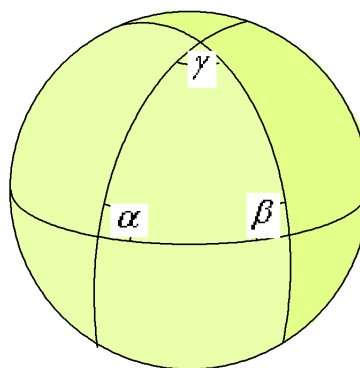


Abbildung 3.10

---

**Aufgabe 3.1 (4 Punkte)**

- i) Wir berechnen den Erdradius wie einst Eratosthenes: Er wusste von einem Brunnen in der Stadt Syene, in dem sich am 21. Juni die Sonne genau spiegelte (d.h. genau senkrecht stand); in seiner Heimatstadt Alexandria maß er an diesem Tag eine Abweichung von  $7^\circ$  zur Senkrechten. Syene lag 780 km von Alexandria entfernt.

Berechnen Sie den Erdradius!

- ii) Der Maintower hat eine Aussichtsplattform in 200 Meter Höhe. Wie weit können Sie von dort bei optimalen Bedingungen gucken, d.h. wie weit ist der Punkt am Horizont vom Fuße des Maintowers entfernt?

**Aufgabe 3.2 (4 Punkte)**

Berechnen Sie die (kürzeste) Flug-Entfernung von Frankfurt ( $50^\circ$  nördlicher Breite;  $8^\circ$  östlicher Länge) nach Oaxaca ( $17^\circ$  nördlicher Breite;  $96^\circ$  westlicher Länge). Der Erdradius ist ungefähr 6380 km.

*Hinweis:* Betrachten Sie das (sphärische) Dreieck bestehend aus Frankfurt, Oaxaca und dem Nordpol.

**Aufgabe 3.3 (4 Punkte)**

Sei  $\Delta$  ein sphärisches Dreieck mit drei gleichen Winkeln und Seitenlängen kleiner oder gleich  $\frac{\pi}{2}$  auf einer Sphäre mit Radius 1.

- i) Zeigen Sie, dass alle drei Seiten von  $\Delta$  gleich lang sind.  
ii) Berechnen Sie diese Länge, falls  $\Delta$  Flächeninhalt  $\frac{\pi}{2}$  hat.

**Aufgabe 3.4 (4 Punkte)**

Sei  $n \geq 3$  und  $P_n$  ein sphärisches  $n$ -Eck mit Winkeln  $\alpha_i$  auf einer Sphäre mit Radius 1, sodass für alle  $i$  die Relation  $0 < \alpha_i < \pi$  gilt.

Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt  $\mathfrak{F}(P_n)$  von  $P_n$  durch

$$\mathfrak{F}(P_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi$$

gegeben ist.

*Hinweis:* Verwenden Sie ohne Beweis, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Ecken des Polygons  $P_n$  im Inneren von  $P_n$  liegt.

## 4 Kegelschnitte

Die Kreisgleichung in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  mit Mittelpunkt 0 und Radius  $r$  ist gegeben durch

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

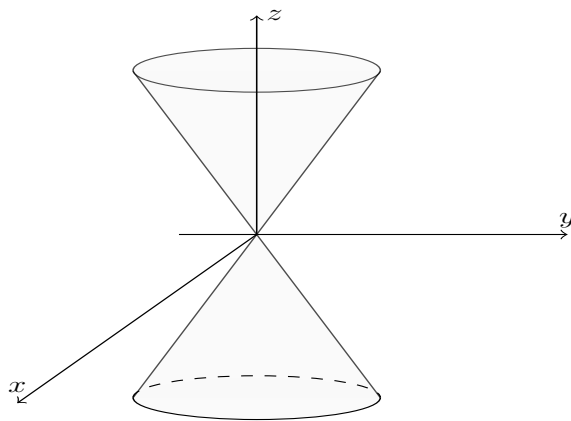


Abbildung 4.1: Ein Kegel als Rotationsfläche

Ein Kegel  $K$  in  $\mathbb{R}^3$  ist die Rotationsfläche einer Geraden  $g$  um eine Achse  $a$ , die  $g$  schneidet und **nicht** senkrecht auf  $g$  steht. Im folgenden wählen wir immer  $a$  gleich der  $z$ -Achse. Mit anderen Worten ist eine solche Kegelformel im  $\mathbb{R}^3$  mit Spitze in  $0$  gegeben durch (vgl. Abbildung 4.1):

$$x^2 + y^2 = bz^2. \quad (4.1)$$

Die Punkte auf einem Kegel, die die selbe  $z$ -Koordinate haben, liegen auf einem Kreis parallel zur  $xy$ -Ebene. Ein „Kegelschnitt“ ist der Schnitt des Kegels  $K$  (Gleichung (4.1)) mit einer Ebene  $E$ .

Wir möchten jetzt Kegelschnitte näher untersuchen. Weil der Kegel symmetrisch unter Rotation um die  $z$ -Achse ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Ebene  $E$  senkrecht auf der  $yz$ -Ebene steht, denn jede Ebene steht senkrecht auf einer Ebene, die die  $z$ -Achse enthält und durch Rotation um die  $z$ -Achse nehmen können wir annehmen, dass die  $yz$ -Ebene schon diese Eigenschaft hat. (Für spätere Anwendungen halten wir hier noch fest, dass eine solche Rotation auch Längen und Winkel unverändert lässt, d.h. eine orthogonale Transformation ist.) D.h. die Gleichung von  $E$  ist von der Form

$$uy + vz = w.$$

Wir unterscheiden nun einige verschiedene Fälle.

*Der entartete Fall*  $w = 0$ . Dies ist äquivalent dazu, dass  $E$  durch den Ursprung  $0$  geht. Für  $v \neq 0$  ist  $z = \lambda y$ , wobei  $\lambda = -\frac{u}{v}$ . Dann ist  $K \cap E$  gegeben durch

$$x^2 + y^2 = b\lambda^2 y^2 \quad \text{oder äquivalent durch} \quad x^2 = (b\lambda^2 - 1)y^2.$$

Also ist für  $b\lambda^2 < 1$  dann  $K \cap E = \{0\}$  nur der Nullpunkt. Für  $b\lambda^2 = 1$  ist  $K \cap E$  die Gerade  $g = \{(0, y, \lambda y), y \in \mathbb{R}\}$ . Schließlich ist für  $b\lambda^2 > 1$  der Schnitt  $K \cap E$  das Geradenpaar  $g_{1/2} = \{(\pm\sqrt{b\lambda^2 - 1} y, y, \lambda y), y \in \mathbb{R}\}$ . Für den Fall  $v = 0$  ist der Schnitt das Geradenpaar  $g_{1/2} = \{(\pm\sqrt{b} z, u, z), z \in \mathbb{R}\}$ .



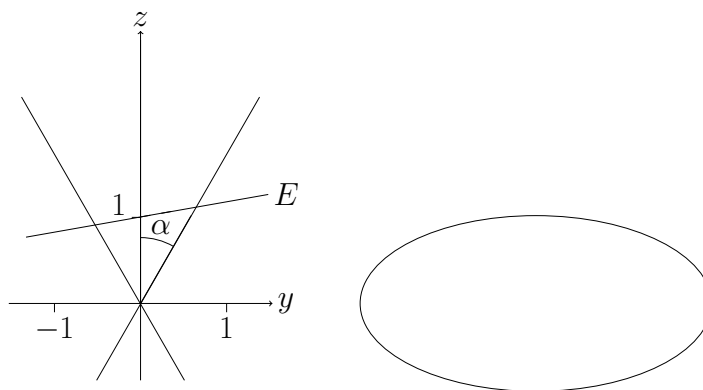
---

Der Fall  $w \neq 0$ . Wir betrachten zunächst wieder den Fall  $v \neq 0$ . Dann liegt  $(0, 0, \frac{w}{v}) \in E$ , also gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit (nach zentrischer Streckung am Ursprung), dass  $E$  durch den Punkt  $(0, 0, 1)$  geht.  $E$  ist somit durch die Gleichung

$$E: z = 1 + \lambda y$$

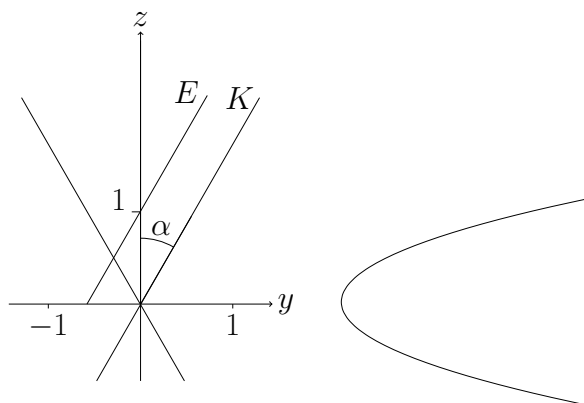
beschrieben. Wir beschreiben zu verschiedenen Fälle zunächst anschaulich.

1. *Unterfall*  $|\lambda| < \cot \alpha$ . Die Aufriss-Projektion auf die  $yz$ -Ebene sieht wie folgt aus.



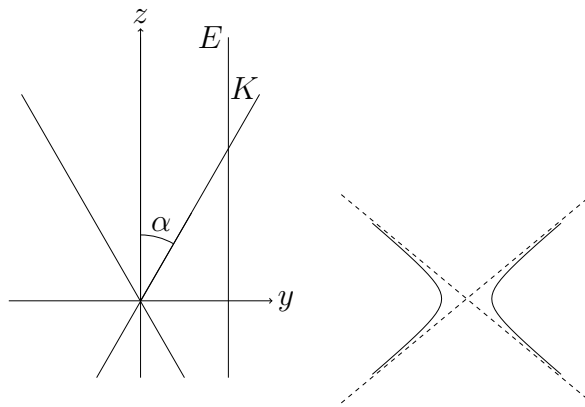
In diesem Fall ist  $K \cap E$  ist eine **Ellipse**.

2. *Unterfall*  $|\lambda| = \cot \alpha$ . Die Aufriss-Projektion auf die  $yz$ -Ebene sieht wie folgt aus.



In diesem Fall ist  $K \cap E$  ist eine **Parabel**.

3. *Unterfall*  $|\lambda| > \cot \alpha$ . Die Aufriss-Projektion auf die  $yz$ -Ebene sieht wie folgt aus.



In diesem Fall ist  $K \cap E$  ist eine **Hyperbel**.

Bekanntermaßen beschreiben Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln in der Natur die Bahnkurven von Himmelskörpern (1. Keplersches Gesetz). Zum Beispiel sind die Bahnen der Planeten um die Sonne Ellipsen.

Nun wollen wir die obige zeichnerische Beschreibung des Grundrisses (Projektion auf  $xy$ -Ebene) von  $K \cap E$  noch rechnerisch belegen, d.h. zeigen, dass die Gleichungen den allgemeinen Gleichungen einer Ellipse, Parabel bzw. Hyperbel (vgl. (4.3)) bis auf Verschiebung  $(x, y) \mapsto (x - x_0, y - y_0)$  der Koordinaten genügen. Dazu muss man zunächst beachten, dass die Kegelgleichung (mit den Bezeichnungen, wie in den obigen Abbildungen) gegeben ist durch

$$x^2 + y^2 = \tan^2 \alpha z^2.$$

Setzen wir die Gleichung der Ebene ( $z = 1 + \lambda y$ ) ein, so erhalten wir für den Schnitt

$$x^2 + y^2 = \tan^2 \alpha (1 + 2\lambda y + \lambda^2 y^2)$$

Der 1. Unterfall  $|\lambda| < \cot \alpha$  ist äquivalent zu  $\lambda^2 \cdot \tan^2 \alpha < 1$ . Wir formen die Gleichung des Schnittes um zu

$$x^2 + (1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha) y^2 - 2\lambda \tan^2 \alpha y = \tan^2 \alpha.$$

Nach quadratischer Ergänzung

$$x^2 + (1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha) \left( y - \frac{\lambda \tan^2 \alpha}{1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha} \right)^2 = \frac{\tan^2 \alpha}{1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha}.$$

Durch Division bringen wir nun die rechte Seite auf 1, also

$$\frac{1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} x^2 + \frac{(1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha)^2}{\tan^2 \alpha} \left( y - \frac{\lambda \tan^2 \alpha}{1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha} \right)^2 = 1.$$

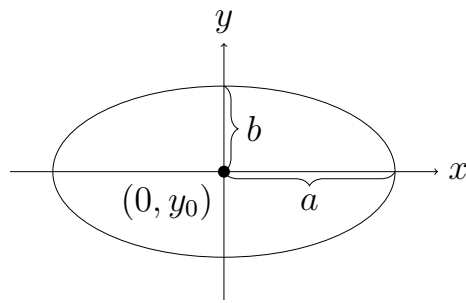


Abbildung 4.2: Ellipse mit Halbachsen  $a$  und  $b$

Die Gleichung ist von der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit } a, b > 0$$

und beschreibt daher eine Ellipse mit Halbachsen  $a, b$  und Mittelpunkt  $(0, y_0)$ .

Im Spezialfall  $\lambda = 0$ , d.h.  $a = b$ , handelt es sich um einen Kreis mit Mittelpunkt  $(0, 0)$  und Radius  $\tan \alpha$ .

Der 2. *Unterfall*  $|\lambda| = \cot \alpha$  ist äquivalent zu  $\lambda^2 \tan^2 \alpha = 1$ . Also gilt

$$x^2 = \tan^2 \alpha + 2\lambda \tan^2 \alpha y, \quad \text{also } y = \frac{1}{2\lambda \tan^2 \alpha} x^2 - \frac{1}{2\lambda}$$

und erhalten eine Parabel.

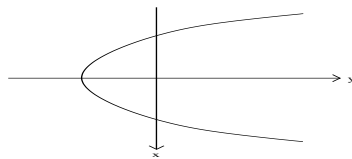


Abbildung 4.3: Parabel

Der 3. *Unterfall*  $|\lambda| > \cot \alpha$  ist äquivalent zu  $\lambda^2 \tan^2 \alpha > 1$ . Wie im 1. Unterfall gilt dann

$$-\frac{\lambda^2 \tan^2 \alpha - 1}{\tan^2 \alpha} x^2 + \frac{(1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha)^2}{\tan^2 \alpha} \left( y - \frac{\lambda \tan^2 \alpha}{1 - \lambda^2 \tan^2 \alpha} \right)^2 = 1$$

Die Gleichung ist von der Form

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit } a, b > 0$$

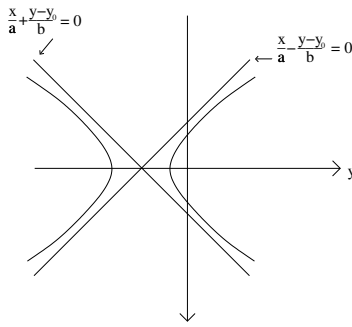


Abbildung 4.4: Hyperbel

oder äquivalent

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{(y - y_0)}{b}\right) \left(-\frac{x}{a} + \frac{(y - y_0)}{b}\right) = 1,$$

also ist  $K \cap E$  eine Hyperbel.

Im Fall  $v = 0$  ist  $E$  durch  $uy = w$  gegeben, also wird  $K \cap E$  durch  $x^2 + \left(\frac{w}{u}\right)^2 = z^2$  beschrieben und ist folglich auch eine Hyperbel.

Wir möchten (nicht entartete) Kegelschnitte jetzt genauer geometrisch beschreiben. Dafür brauchen wir die **Dandelin'sche Kugeln**. Dies sind Kugeln mit Mittelpunkt auf der Kegealachse (vgl. Abbildung 4.5), welche den Kegel auf einer Kreislinie und die Schnittebene  $E$  in einem Punkt berühren. In der Aufrisszeichnung (wieder mit  $E$  parallel zur  $y$ -Achse bzw. senkrecht zur  $yz$ -Ebene) sind dies also Inkreise bzw. Ankreise eines Dreiecks. Die Berührungspunkte mit  $E$  heißen Brennpunkte  $F_1, F_2$  (bzw.  $F$ ) des Kegelschnitts. Man beachte, dass es im Parabelfall nur einen Brennpunkt gibt.

**Satz 4.1** Für jeden Punkt  $P$  der Ellipse ist die Summe der Abstände zu den Brennpunkten  $F_1, F_2$  konstant. Genauer gilt

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a,$$

wobei  $a$  die Länge der großen Halbachse ist (vgl. Abbildung 4.6).

Aus diesem Satz folgt auch unmittelbar, dass die beiden Brennpunkte auf der Geraden liegen, die die beiden großen Halbachsen enthält.

**Bemerkung 4.2** Eine Ellipse kann folglich mit einem Stück Schnur konstruiert werden, dessen Enden an den Brennpunkten befestigt sind, die sogenannte **(Gärtnerkonstruktion)**.

**Beweis :** Die Ellipse sei der Schnitt der Ebene  $E$  mit dem Kegel  $K$ , (vgl. Abbildung 4.7). Nun lege man eine Mantellinie von der Kegelspitze durch  $P$ . Diese berührt die Berührungskreise der Dandelin'schen Kugeln in den Punkten  $B_1$  und  $B_2$ . Beachte, dass  $PB_1$  eine Tangente an eine

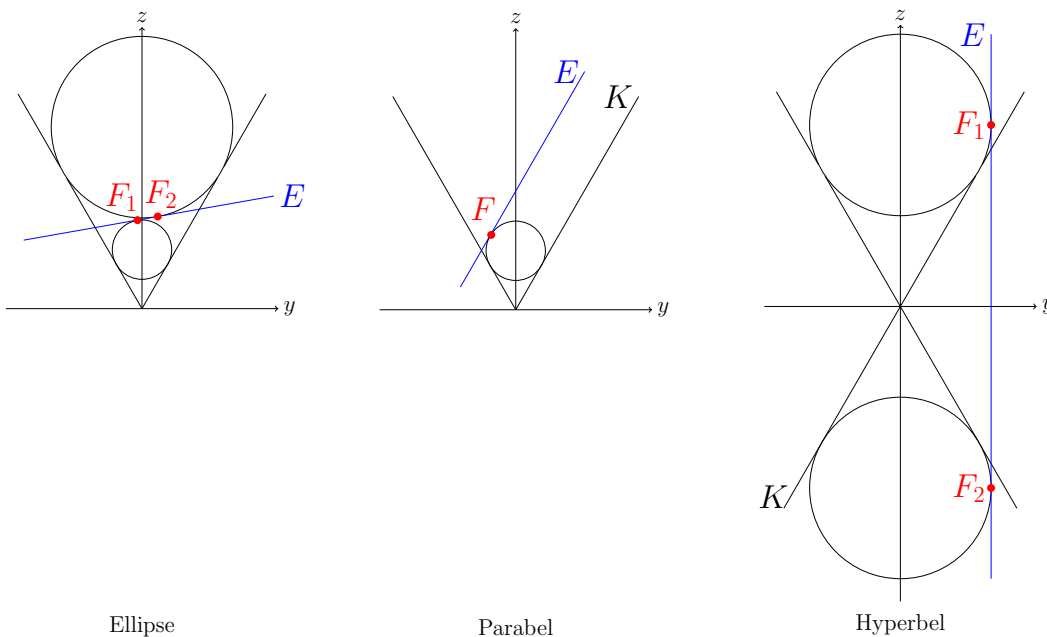


Abbildung 4.5: Aufrisse der Dandelin'schen Kugeln

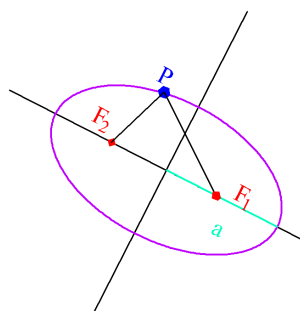


Abbildung 4.6: Gärtnerkonstruktion einer Ellipse

Dandelinsche Kugel ist, die die Kugel in  $B_1$  berührt und  $PF_1$  eine Tangente an dieselbe Dandelinsche Kugel ist, die die Kugel in  $F_1$  berührt. Also gilt

$$|PB_1| = |PF_1|$$

und analog

$$|PB_2| = |PF_2|.$$

Folglich

$$|PF_1| + |PF_2| = |PB_1| + |PB_2|.$$

Andererseits ist  $|PB_1| + |PB_2|$  konstant, weil die Berührungskreise der Dandelinschen Kugeln mit dem Kegel senkrecht zur Kegelachse stehen und daher auf allen Mantellinien den glei-

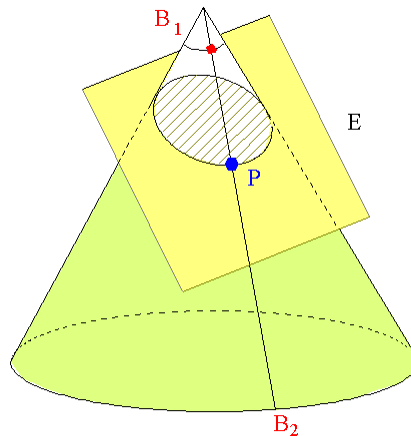


Abbildung 4.7: Mantellinie durch  $P$  und Berührungskreise der Dandelin'schen Kugeln

chen Abstand haben (und weil natürlich  $|PB_1| + |PB_2| = |B_1B_2|$  gilt). Durch den Spezialfall eines Punktes  $P$  auf der großen Halbachse sieht man, dass  $|PF_1| + |PF_2| = 2a$  sein muss.  $\square$

Ellipsen kann man noch auf zwei weitere Arten geometrisch beschreiben, mit Hilfe von Abständen zu Geraden bzw. zu Kreisen, statt zu Punkten.

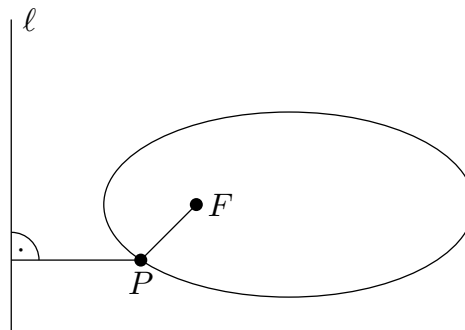


Abbildung 4.8: Leitgeradeneigenschaft der Ellipse

**Satz 4.3** Sei  $K \cap E$  eine Ellipse mit Brennpunkten  $F_1 \neq F_2$  und großer Halbachse  $a$ . Es existieren Geraden  $\ell_1$  und  $\ell_2$  mit der folgenden Eigenschaft. Für alle Punkte  $P$  auf der Ellipse  $K \cap E$  gilt

$$\frac{|PF_1|}{|P\ell_1|} = \frac{|PF_2|}{|P\ell_2|} = \frac{|F_1F_2|}{2a} =: \varepsilon.$$

**Definition 4.4** Die beiden Geraden  $\ell_1$  und  $\ell_2$  heißen **Leitgeraden** und  $0 \leq \varepsilon < 1$  heißt **Exzentrizität** der Ellipse.

**Bemerkung 4.5** Bei einem Kreis ist  $F_1 = F_2 = M$  (Mittelpunkt) und deshalb  $\varepsilon = 0$ . Daher gibt es in diesem Fall keine Leitgerade.

**Beweis :** Seien  $E_1, E_2$  die beiden Ebenen, in denen die Berührungskreise der Dandelin-Kugeln mit dem Kegel liegen. (Diese sind beide senkrecht zur z-Achse. Die Berührungskreise sind die Kreise durch  $B_1$  und  $B_2$  in Abbildung 4.7). Wir setzen

$$\ell_1 := E_1 \cap E, \quad \ell_2 := E_2 \cap E.$$

Dann sind  $\ell_1$  und  $\ell_2$  beide parallel zur x-Achse (sie stehen senkrecht zur yz-Ebene). Sei nun  $P$  ein beliebiger Punkt der Ellipse  $K \cap E$  und sei  $m$  wie im Beweis von Satz 4.1 die Mantellinie von  $K$  durch  $P$ . Diese geht durch 0 und  $P$ . Mit  $B_1, B_2$  bezeichnen wir wieder die Berührungspunkte von  $m$  mit den Dandelinschen Kugeln.  $h$  sei die Senkrechte auf  $\ell_1$  und  $\ell_2$  durch  $P$  (diese liegt in  $E$ ) und  $L_1$  der Schnittpunkt von  $h$  mit  $\ell_1$  und  $L_2$  der Schnittpunkt von  $h$  mit  $\ell_2$  (vgl. Abbildung 4.9)

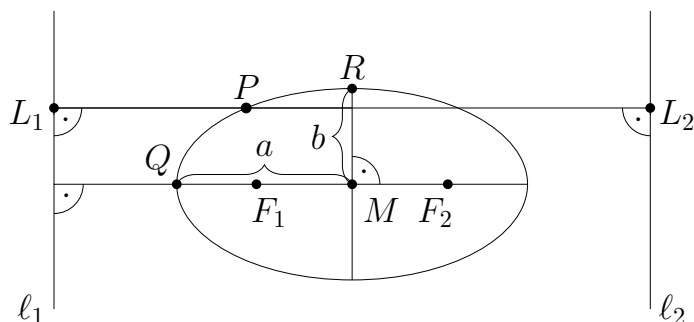


Abbildung 4.9: Zeichnung in der Ebene  $E$  zum Nachweis der Leitradeneigenschaft

Dann folgt, dass

$$|P\ell_1| + |P\ell_2| = |PL_1| + |PL_2| = |\ell_1\ell_2|$$

unabhängig vom Punkt  $P$  ist. Wir betrachten nun die Aufrisszeichnung und bezeichnen die Aufrissbilder der Punkte und geraden wie immer mit zwei Strichen. Mit Hilfe des Strahlensatzes sieht man dann

$$\frac{|P''B_1''|}{|P''B_2''|} = \frac{|P''L_1''|}{|P''L_2''|}$$

Weil die Längenverhältnisse auf Geraden bei der Zweitafelprojektion erhalten bleiben, folgt

$$\frac{|PB_1|}{|PB_2|} = \frac{|PL_1|}{|PL_2|} \quad \text{oder äquivalent} \quad \frac{|PB_1|}{|PL_1|} = \frac{|PB_2|}{|PL_2|}.$$

Wie im Beweis von Satz 4.1 gilt  $|PB_1| = |PF_1|$  und  $|PB_2| = |PF_2|$ . Daher ist

$$\varepsilon(P) := \frac{|PF_1|}{|P\ell_1|} = \frac{|PF_2|}{|P\ell_2|}.$$

Dies ist die erste Gleichheit des Satzes. Wir wollen nun zeigen, dass dieses Verhältnis nicht von  $P$  abhängt und gleich  $|F_1F_2|/2a$  ist. Dazu verwenden wir, dass nach Satz 4.1

$$2a = |PF_1| + |PF_2| = \varepsilon(P) \cdot (|P\ell_1| + |P\ell_2|) = \varepsilon(P) |\ell_1\ell_2|.$$

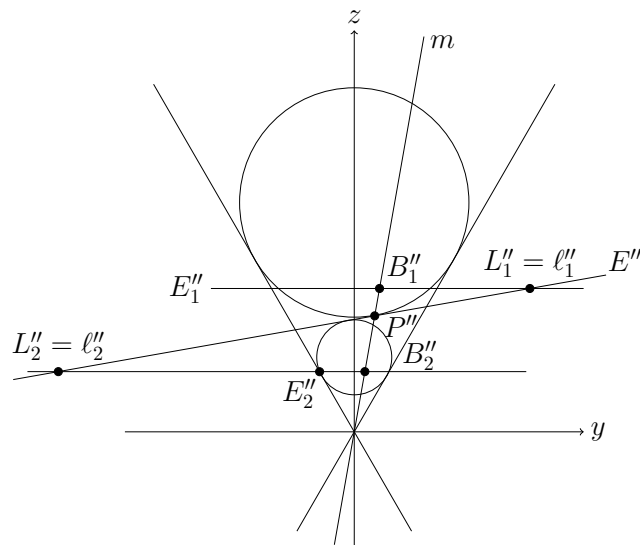


Abbildung 4.10: Aufrisszeichnung der Leitgeradenkonstruktion

Dies zeigt, dass  $\varepsilon(P) = \frac{2a}{|\ell_1 \ell_2|} =: \varepsilon$  unabhängig von  $P$  ist. Es ist jetzt noch zu zeigen, dass

$$\frac{2a}{|\ell_1 \ell_2|} = \frac{|F_1 F_2|}{2a}$$

gilt. Wir setzen dazu

$$\varepsilon' := \frac{|F_1 F_2|}{2a} = \frac{2|MF_1|}{2a} = \frac{|MF_1|}{a},$$

wobei  $M$  der Mittelpunkt der Ellipse ist. Sei nun  $Q$  der Ellipsenpunkt zwischen  $\ell_1$  und  $F_1$  auf der großen Halbachse (vgl. Abbildung 4.9). Dann gilt

$$|Q\ell_1| = \frac{|QF_1|}{\varepsilon} = \frac{a - |MF_1|}{\varepsilon} = \frac{a - \varepsilon' a}{\varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon'}{\varepsilon} \cdot a.$$

Andererseits

$$|Q\ell_1| = |M\ell_1| - a = |R\ell_1| - a = \frac{|RF_1|}{\varepsilon} - a = \frac{a}{\varepsilon} - a = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \cdot a.$$

Das heißt  $\varepsilon = \varepsilon'$ . □

Sei  $P$  ein Punkte auf einer Ellipse und  $t$  die Tangente an die Ellipse, welche in  $P$  berührt. Die Senkrechte  $n$  an  $t$  in  $P$  wird *Normale* der Ellipse in  $P$  genannt.

**Satz 4.6** Sei  $K \cap E$  eine Ellipse mit Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$ . In jedem Ellipsenpunkt  $P$  wird der Winkel  $\angle F_1 P F_2$  von der Normalen halbiert (vgl. Abbildung 4.11)

Physikalisch ausgedrückt heißt das, dass ein Lichtstrahl von  $F_1$  nach  $P$  an der Ellipse nach  $F_2$  abgelenkt wird. Eine andere mögliche Anwendung ist das „Flüstergewölbe“.





Abbildung 4.11: Winkel im Flüstergewölbe

**Beweis :** Nach Satz 4.1 wissen wir, dass  $|PF_1| + |PF_2| = 2a$  ist, wobei  $a$  die Länge der großen Halbachse ist. Wir definieren  $F'_1$  als den Punkt auf der Geraden  $F_1P$  mit  $|F'_1F_1| = 2a$  und  $|F'_1P| < 2a$ . Mit  $t$  wird die Mittelsenkrechte zwischen  $F'_1$  und  $F_2$  bezeichnet (vgl. Abbildung 4.11, rechts). Es soll nun gezeigt werden, dass  $t$  die Tangente an die Ellipse in  $P$  ist. Wegen

$$|F'_1P| = |F'_1F_1| - |F_1P| = 2a - |F_1P| = |PF_2|$$

liegt  $P$  auf  $t$ . Es ist also noch zu zeigen, dass kein anderer Punkt von  $K \cap E$  auf  $t$  liegt. Sei  $Q \in E, Q \neq P$ . Dann liegt  $Q$  **nicht** auf der Verbindungsstrecke  $\overline{F_1F'_1}$ . Daher

$$|QF'_1| + |QF_1| > |F_1F'_1| = 2a = |QF_1| + |QF_2|.$$

Dabei haben wir im ersten Schritt die Dreiecksungleichung verwendet und im zweiten die Definition von  $F'_1$ . Es folgt

$$|QF'_1| > |QF_2|,$$

also  $Q \notin t$  (vgl. auch Abbildung 4.11, rechts).

Sei nun  $n$  die Senkrechte auf  $t$  durch  $P$ . Es gilt  $|F'_1P| = |F_2P|$  und  $t \perp F_2F'_1$ , also  $\beta_1 = \beta_2$  in der Skizze. Aus

$$\alpha_1 = 90 - \beta_1 = 90 - \beta_2 = \alpha_2$$

folgt die Behauptung. □

Aus dem Beweis folgt:

**Korollar 4.7** Die Ellipse ist der Ort aller Punkte, welche von einem Kreis –nämlich um  $F_1$  mit Radius  $2a$ – und einen Punkt im Innern des Kreises –nämlich  $F_2$ – den gleichen Abstand haben.

All diese Sätze haben analoge Versionen für die anderen Kegelschnitte. Wir geben die Aussagen für die Hyperbel ohne (die sehr ähnlichen) Beweise an.

**Satz 4.8** Für jeden Punkt  $P$  einer Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ist die Differenz der Abstände zu den Brennpunkten konstant. Genauer ist

$$\left| |PF_1| - |PF_2| \right| = 2a$$

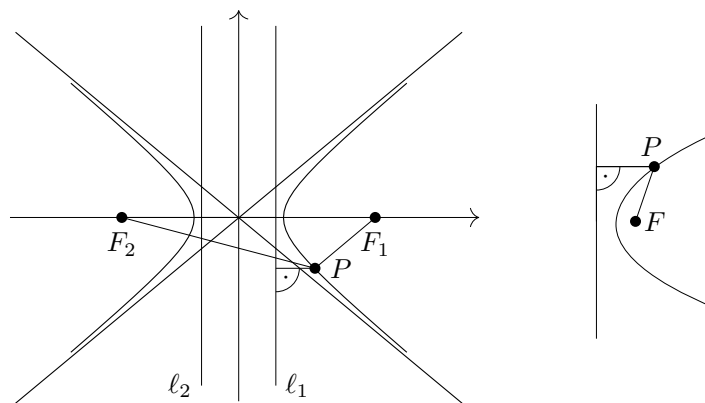


Abbildung 4.12: Leitgeraden bei Hyperbel und Parabel

**Satz 4.9** Sei  $K \cap E$  eine Hyperbel mit Brennpunkten  $F_1, F_2$ . Dann gibt es zwei Leitgeraden  $\ell_1$  und  $\ell_2$  mit folgender Eigenschaft (vgl. Abbildung 4.12). Für alle Punkte  $P$  in  $K \cap E$  gilt

$$\frac{|PF_1|}{|P\ell_1|} = \frac{|PF_2|}{|P\ell_2|} = \frac{|F_1F_2|}{2a} =: \varepsilon > 1.$$

Die analoge Eigenschaft zum Korollar 4.7 der Hyperbel ist: Eine Hyperbelast ist der Ort aller Punkte, welche von einem Kreis und einem Punkt im Äußeren des Kreises den gleichen Abstand haben (vgl. Abbildung 4.13). Der Kreis  $K$  hat den Mittelpunkt  $F_1$  und den Radius

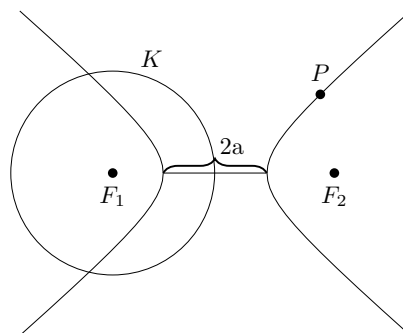


Abbildung 4.13: Charakterisierung der Hyperbel

$2a$  und der Punkt ist  $F_2$ . Zu Beweis dieser Behauptung beobachte man, dass die charakterisierende Eigenschaft  $|F_1P| - |F_2P| = 2a$  der Hyperbel für alle  $P \in K$  zu

$$|F_2P| = |F_1P| - 2a$$

äquivalent ist. Die rechte Seite dieser Gleichung beschreibt gerade den Abstand zum Kreis, wie man einsieht, wenn man die Verbindungsgerade  $F_1P$  einzeichnet. Für den anderen

---

Hyperbelast verwendet man einen Kreis  $K$  mit Mittelpunkt  $F_2$  und Radius  $2a$  und den Punkt  $F_1$ .

Schließlich formulieren wir die entsprechenden Sätze für eine Parabel.

**Satz 4.10** Sei  $K \cap E$  eine Parabel. Dann gibt es eine Leitgerade  $\ell$  mit folgender Eigenschaft (vgl. Abbildung 4.12). Für alle Punkte  $P$  in  $K \cap E$  gilt

$$|PF| = |P\ell|$$

d.h.  $\varepsilon = 1$  für eine Parabel.

Das Analogon zum Flüstergewölbe in der Ellipse ist folgende Eigenschaft der Parabel.

**Satz 4.11** Sei  $P$  ein beliebiger Punkt auf einer Parabel mit Brennpunkt  $F$  und Leitgerade  $\ell$ . Sei  $L$  der Fußpunkt des Lots von  $P$  auf  $\ell$ . Dann halbiert die Tangente durch  $P$  den Winkel  $\angle FPL$ .

Physikalisch bedeutet dies, dass senkrecht zur Leitgerade anfallende Lichtstrahlen alle in den Brennpunkt reflektiert werden. Dies macht man sich beim Parabolspiegel zunutze. Ein Parabolspiegel ist die Rotationsfläche, die beim Rotieren einer Parabel um die Achse senkrecht zu  $\ell$  durch  $F$  entsteht.

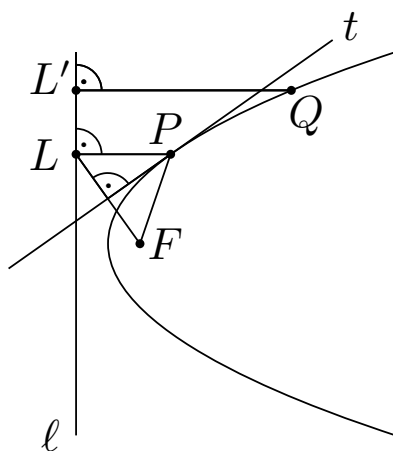


Abbildung 4.14: Brennpunkt der Parabel: Die Mittelsenkrechte auf  $FL$  ist die Tangente bei  $P$

**Beweis :** Wegen  $|PF| = |PL|$  ist  $PFL$  ein gleichschenkliges Dreieck. Sei nun  $t$  die Mittelsenkrechte zwischen  $F$  und  $L$ . Wir zeigen wieder, dass  $t$  die Tangente an die Parabel ist. Sei also  $Q$  ein anderer Parabelpunkt und  $L'$  der Fußpunkt des Lots durch  $Q$  auf  $\ell$ . Dann gilt nach Satz 4.10 die Gleichung

$$|FQ| = |L'Q| < |LQ| ,$$

und die Ungleichung folgt, weil  $L' \neq L$  und  $LQL'$  rechtwinklig ist. Also ist  $Q \notin t$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

---

Die rechnerische Bestimmung all dieser Größen, die Leitlinien und Brennpunkte zu gegebener Gleichung einer Ellipse (oder Parabel oder Hyperbel) und umgekehrt, die Konstruktion des entsprechenden Kegelschnitts bei vorgegebenem Brennpunkt und Leitgeraden, wird in den Übungen diskutiert. Dabei ist es nützlich sich an die rechnerische Bestimmung einer Tangenten zu erinnern. Wir führen dies exemplarisch am Fall einer Parabel vor, die bzgl. der  $y$ -Achse spiegelsymmetrisch ist. Sei diese gegeben durch  $y - ax^2 - c = 0$  und  $P = (x_0, y_0)$  mit  $y_0 = ax_0^2 + c$  ein Punkt auf der Parabel. Wir fassen die Parabel als Graph der Funktion  $f(x) = ax^2 + c$  auf, also  $f'(x) = 2ax$ . Dann ist die Tangente durch  $P$  gegeben durch

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2ax_0 \cdot x + c - ax_0^2\}$$

Bei der Bestimmung der Tangenten an eine Ellipse ist zu beachten, dass diese nicht überall als Graph  $(x, f(x))$  einer Funktion von  $x$  dargestellt werden kann. Sie kann aber überall entweder so oder als Graph  $(g(y), y)$  einer Funktion von  $y$  dargestellt werden und damit kann man Ellipsentangenten in jedem Punkt bestimmen.

Wir betrachten nun allgemeiner eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Dies beschreibt eine **Quadrik**, d.h. eine Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}.$$

Eine solche Quadrik lässt sich (falls das quadratische Polynom  $\neq 0$  ist) durch Kongruenzabbildungen (= Translationen, Spiegelungen, Drehungen) in die *entartete Fälle*

$$\begin{aligned} \text{die leere Menge} & \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1\right), \\ \text{einen Punkt} & \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0\right), \\ \text{ein Geradenpaar} & \quad \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0\right), \end{aligned} \tag{4.2}$$

oder in

$$\begin{aligned} \text{eine Ellipse} & \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ \text{eine Hyperbel} & \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ \text{eine Parabel} & \quad kx = y^2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

überführen. Verwendet man noch allgemeinere Transformationen, lassen sich die Gleichungen noch weiter vereinfachen: Eine *affine Transformation*

$$(x, y) \mapsto (x, z), \quad z = \frac{a}{b}y \tag{4.4}$$

---

macht aus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Kreisgleichung

$$x^2 + z^2 = a^2.$$

Umgekehrt ist eine Ellipse affines Bild des Kreises. Bei der zu (4.4) inversen Abbildung werden alle  $y$ -Koordinaten um den Faktor  $\frac{b}{a}$  verkürzt. Damit kann man nachrechnen, dass der Flächeninhalt der Ellipse  $\frac{b}{a}\pi a^2 = \pi ab$  ist.

#### Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Ein Flugzeug startet mit einem Winkel zum Äquator von  $25^\circ$  in Frankfurt ( $50^\circ$  nördlicher Breite;  $8^\circ$  östlicher Länge) und fliegt 6215km entlang eines Großkreises Richtung Nord-Westen. An welchem Punkt auf der Erde (Längengrad, Breitengrad) befindet sich das Flugzeug nun?

Nehmen Sie für diese Aufgabe wieder an, dass der Erdradius 6380km beträgt.

#### Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Eine Strecke  $AB$  der Länge 6 gleite in der  $xy$ -Ebene so zwischen den Koordinatenachsen, dass  $A$  stets auf der  $x$ -Achse und  $B$  stets auf der  $y$ -Achse bleibt. Sei  $P$  der Punkt auf der Strecke  $AB$  mit Abstand 4 zu  $A$  und Abstand 2 zu  $B$ .

- i) Sei  $t$  der Abstand von  $B$  zum Nullpunkt. Drücken Sie die Koordinaten von  $P$  in Abhängigkeit von  $t$  aus.

*Hinweis:* Strahlensatz.

- ii) Zeigen Sie, dass  $P$  sich auf einer Ellipse bewegt. Überlegen Sie sich dazu zunächst, welche Längen die Halbachsen haben müssen.

#### Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

Die Erde umkreist die Sonne auf einer Ellipse, deren einer Brennpunkt die Sonne ist. Im Perihel (kürzester Abstand) ist die Erde 147,09 Millionen Kilometer von der Sonne entfernt, während es im Aphel (längster Abstand) 152,10 Millionen Kilometer sind.

Berechnen Sie die große und kleine Halbachse der Erdbahn.

#### Aufgabe 4.4 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ellipse mit Mittelpunkt  $M = (0, 2)$  (nicht zu verwechseln mit dem Brennpunkt!), die durch die Punkte  $P = (8, -1)$  und  $Q = (6, 6)$  geht.

#### Aufgabe 4.5 (4 Punkte)

Gegeben sei die Ellipse  $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , sowie  $P = (x_0, y_0) \in E$ .

Zeigen Sie, dass die Tangente an  $E$  durch den Punkt  $P$  die Gleichung  $T_P : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$  erfüllt.

---

**Lösungsvorschlag:**

Für  $y_0 \neq 0$  werden die Punkte in  $E$  um  $P$  herum durch die Gleichung  $(x, f(x))$  mit

$$f(x) = \text{sign}(y_0)b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

beschrieben (wir wählen das Vorzeichen der Wurzel passend zu  $y_0$ ). Daher gilt nach der Kettenregel

$$f'(x) = -\text{sign}(y_0)\frac{bx}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = -\frac{b^2x}{a^2f(x)}.$$

Für die Tangente am Punkt  $P$  an  $E$  bzw.  $f$  gilt dann offenbar

$$\begin{aligned} y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) &= -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0) + y_0 \iff a^2yy_0 + b^2xx_0 = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 \\ &\iff \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \end{aligned}$$

da der Punkt  $P$  die Gleichung  $E$  erfüllt.

Um die Punkte  $(x_0, 0) \in E$  herum lassen sich die Punkte in  $E$  analog durch  $(g(y), y)$  mit

$$g(y) = \text{sign}(s_0)a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, \quad \text{also} \quad g'(y) = -\frac{a^2y}{b^2g(y)}$$

beschreiben. Folglich gilt für die Tangente:  $x = g'(0)y + g(0) = x_0$ , bzw.

$$x = x_0 \iff \frac{xx_0}{a^2} = \frac{x_0^2}{a^2} = 1,$$

da  $(x_0, 0)$  die Gleichung  $E$  erfüllt.

**Aufgabe 4.6 (5 Punkte)**

Gegeben sei die Ellipse  $E(a, b) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

- i) Bestimmen Sie die Koordinaten der Brennpunkte  $F_1(a, b) = (e(a, b), 0)$  und  $F_2(a, b) = (-e(a, b), 0)$  in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$ .
- ii) Geben Sie die Exzentrizität  $\varepsilon(a, b)$  in Abhängigkeit von  $a$  und  $b$  an.
- iii) Zeigen Sie, dass die Leitgeraden durch

$$l_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{a^2}{e(a, b)} \right\} \quad \text{und} \quad l_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -\frac{a^2}{e(a, b)} \right\}$$

gegeben sind.

- iv) Zeigen Sie, dass Leitgeraden, Brennpunkt und Exzentrizität eine Ellipse eindeutig bestimmen: Zu gegebenen  $a, b \in \mathbb{R}$ , so dass  $a > 0, b > 0$  und  $0 < \varepsilon(a, b) < 1$  gilt, ist

$$\left\{ P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|Pl_1(a, b)|}{|PF_1(a, b)|} = \varepsilon(a, b) \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

---

**Lösungsvorschlag:**

- i) Wir bezeichnen den oberen Scheitelpunkt der Ellipse mit  $S = (0, b) \in E$  und den Ursprung, den Mittelpunkt der Ellipse, mit  $O = (0, 0)$ . Dann liegen die Brennpunkte auf der großen Halbachse, haben also  $y$ -Koordinate 0 und aus Symmetriegründen  $x$ -Koordinate  $\pm e$  für ein  $0 < e < a$ . Außerdem sind aus Symmetriegründen die Dreiecke  $F_1OS$  und  $F_2OS$  kongruent, also gilt

$$|SF_1| + |SF_2| = 2a \implies |SF_1| = |SF_2| = a.$$

Daraus folgt aber  $e^2 + b^2 = a^2$ , also gilt für die Brennpunkte:

$$F_1 = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0), \quad F_2 = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0).$$

- ii) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\varepsilon = \frac{|F_1F_2|}{2a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

nach dem eben Gesehenen.

- iii) Sei  $P = (x, y) \in E$  und  $e = e(a, b)$ . Dann ist

$$|Pl_1|^2 = \left(x - \frac{a^2}{e}\right)^2 \quad \text{und} \quad |PF_1|^2 = (x - e)^2 + y^2.$$

Da  $P$  auf  $E$  liegt, gilt  $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$  und daher

$$|PF_1|^2 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2ex + e^2 + b^2 = \left(x - \frac{a^2}{e^2}\right)^2 \frac{e^2}{a^2} = |Pl_1|^2 \varepsilon^2,$$

da  $e^2 = a^2 - b^2$ . Da alle Werte positiv sind, folgt die Gleichheit auch für die Wurzeln.

Analog gilt:

$$|Pl_2|^2 = \left(x + \frac{a^2}{e}\right)^2 \quad \text{und} \quad |PF_2|^2 = (x + e)^2 + y^2,$$

sowie folglich

$$|PF_2|^2 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2ex + e^2 + b^2 = \left(x + \frac{a^2}{e^2}\right)^2 \frac{e^2}{a^2} = |Pl_2|^2 \varepsilon^2.$$

- iv) Die Inklusion  $\supseteq$  haben wir eben gesehen. Für die Inklusion  $\subseteq$  sei also  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , so dass  $|Pl_1| = |PF_1|/\varepsilon$ , also gilt auch

$$(x - e)^2 + y^2 = \left(x - \frac{a^2}{e}\right)^2 \frac{e^2}{a^2}.$$

Durch ausmultiplizieren sehen wir

$$0 = \left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 + e^2 - a^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 - b^2,$$

da  $e^2 = a^2 - b^2$ . Nach Teilen durch  $b^2$  lässt sich dies zu einer Ellipsengleichung umstellen; wir sehen also, dass  $(x, y)$  in der rechten Menge enthalten ist.

**Aufgabe 4.7 (4 Punkte)**

Gegeben sei die Hyperbel

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

---

mit Asymptotengeraden  $y = \pm \frac{b}{a}x$ . Für  $P \in H$  bezeichnen wir die Tangente an  $H$  durch  $P$  mit  $T_P$ .

Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks, das durch  $T_P$  und die Asymptotengeraden gebildet wird, unabhängig von  $P$  ist.

**Lösungsvorschlag:**

Analog zu Aufgabe 4.5 sehen wir, dass

$$T_P : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Durch Gleichsetzen sehen wir, dass die Schnittpunkte  $S_{\pm}$  von  $T_P$  und  $y = \pm \frac{b}{a}x$  durch

$$S_{\pm} = \left( \frac{a^2b}{x_0b \mp y_0a}, \frac{\pm ab^2}{x_0b \mp y_0a} \right)$$

gegeben sind. Da sich die Asymptoten im Ursprung schneiden, hat das Dreieck also die Ecken  $O = (0, 0)$ , sowie  $S_+$  und  $S_-$ . Wenn wir den Winkel, in dem sich die Asymptoten schneiden mit  $\varphi$  bezeichnen, so gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks:  $F = \frac{1}{2} \sin \varphi |OS_+| |OS_-|$ . Wir rechnen und sehen:

$$|OS_+|^2 |OS_-|^2 = \frac{a^4b^2 + a^2b^4}{(x_0b - y_0a)^2} \cdot \frac{a^4b^2 + a^2b^4}{(x_0b + y_0a)^2} = \frac{a^2b^2(a^2 + b^2) \cdot a^2b^2(a^2 + b^2)}{(x_0^2b^2 - y_0^2a^2)^2} = (a^2 + b^2)^2,$$

da  $(x_0, y_0) \in H$ , also  $x_0^2b^2 - y_0^2a^2 = a^2b^2$ . Insbesondere ist der Flächeninhalt  $F$  damit unabhängig von  $P$ .

**Aufgabe 4.8 (3 Punkte)**

Gegeben sei die Parabel  $P : y = ax^2 + bx + c$  mit  $a \neq 0$ .

Zeigen Sie, dass der Brennpunkt  $F$  und die Leitgerade  $L$  durch

$$F = \left( -\frac{b}{2a}, \frac{1-b^2}{4a} + c \right) \quad \text{und} \quad L = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{1+b^2}{4a} + c \right\}$$

gegeben sind.

**Lösungsvorschlag:**

Wir schreiben

$$y = ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Dann gilt für  $Q = (x, y) \in P$ :

$$\begin{aligned} |QF|^2 &= \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( y - \frac{1-b^2}{4a} - c \right)^2 = \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{1}{4a} \right)^2 \\ &= \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( \frac{4a^2 \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - 1}{4a} \right)^2 = \left( \frac{4a^2 \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + 1}{4a} \right)^2 \\ &= \left( a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{1}{4a} \right)^2 = \left( y + \frac{b^2}{4a} - c + \frac{1}{4a} \right)^2 = |QL|^2. \end{aligned}$$



---

## 5 Die Sätze von Desargues und Pappos

In diesem Kapitel wollen wir zwei wichtige Sätze der ebenen Geometrie kennenlernen. Neben direkter geometrischer Anwendbarkeit sind sie auch im nächsten Abschnitt über axiomatische Zugänge zur Geometrie nützlich. Dort werden wir zeigen, dass in gewissen Geometrien der Satz von Desargues nicht gilt, und diese deswegen nicht gleich der ebenen Geometrie sind.

**Satz 5.1** („Großer Satz von Desargues“) Seien  $ABC$ ,  $A'B'C'$  zwei ebene Dreiecke in „perspektiver Lage“, d.h. die Geraden  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  schneiden sich in einem Punkt  $P$ . Angenommen die Schnittpunkte  $M := AC \cap A'C'$ ,  $L := AB \cap A'B'$  und  $N = BC \cap B'C'$  der entsprechenden Dreieckseiten existieren. Dann liegen  $M$ ,  $L$ ,  $N$  auf einer Geraden.

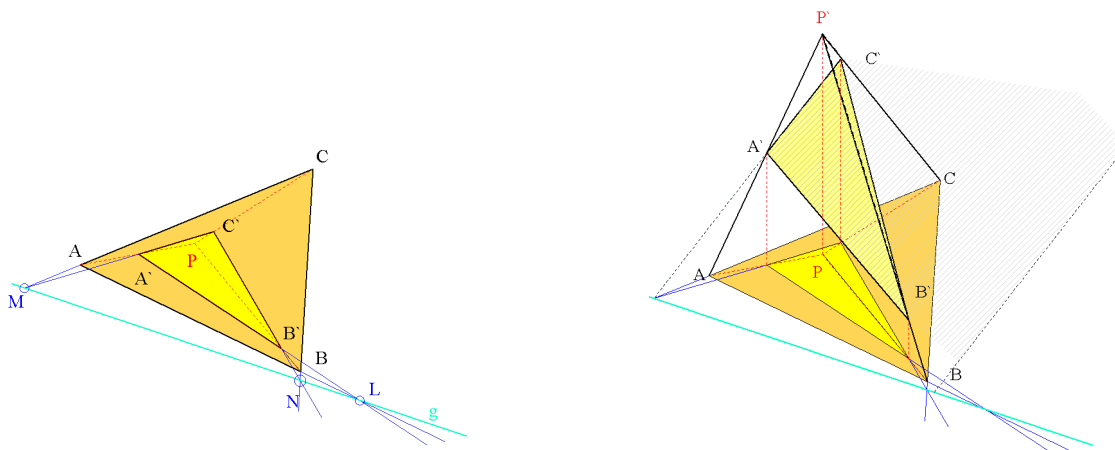


Abbildung 5.1: Zwei Dreiecke in perspektiver Lage und Pyramide zum Beweis

**Beweis :** Die Zeichnung 5.1 lässt sich als die Grundrisszeichnung einer räumlichen Pyramide mit dreieckiger Grundfläche  $ABC$  und Spitze  $P$  (vgl. Abbildung 5.1) interpretieren. (Die  $z$ -Koordinate von  $P$  kann für das Argument beliebig gewählt werden.) Der Punkt  $A'$  liegt auf der Kante  $\overline{AP}$ , der Punkt  $B'$  liegt auf der Kante  $\overline{BP}$  und, analog, liegt  $C'$  auf der Kante  $\overline{CP}$ . Sei  $g$  die Schnittgerade der Grundrissebene und der Ebene durch  $A'B'C'$ . Wir wollen nun zeigen, dass  $M$ ,  $N$ ,  $L$  alle auf der Geraden  $g$  liegen. Der Punkt  $M$  liegt auf der Geraden  $AC$  und somit in der Grundrissebene. Er liegt ausserdem auf der Geraden  $A'C'$  und damit auf der Ebene durch  $A'B'C'$ . Damit liegt  $M$  auf  $g$ . Für die anderen zwei Punkte  $N$  und  $L$  argumentiert man ebenso, indem man die Geraden  $BC$  und  $B'C'$  bzw. die Geraden  $AC$  und  $A'C'$  verwendet.  $\square$

Wie ändert sich die Aussage des Satzes, wenn nicht alle fraglichen Geraden einen Schnittpunkt haben? Ist zum Beispiel  $AB \parallel A'B'$ , aber  $AC \not\parallel A'C'$  und auch  $BC \not\parallel B'C'$  (vgl. Abbil-

dung 5.2), so sei  $g$  die Verbindungsgerade von  $M = AC \cap A'C'$  und  $N = BC \cap B'C'$ . Dann lautet die Aussage des Satz von Desargues, dass  $g \parallel AB \parallel A'B'$  ist.

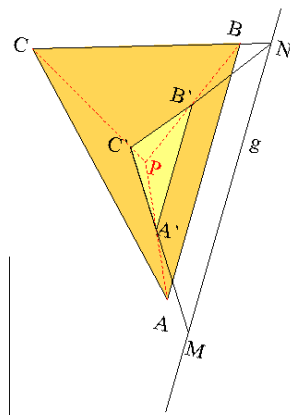


Abbildung 5.2: Satz von Desargues für  $AB \parallel A'B'$

**Beweis :** Nach wie vor kann die Zeichnung als Grundrisszeichnung einer Pyramide aufgefasst werden und  $g$  als Schnittgerade der Grundrissebene (durch  $A, B, C$ ) mit der Ebene  $A', B', C'$ . Wegen  $A'B' \parallel AB$  ist  $AB$  parallel zur Ebene durch  $A', B', C'$  und daher hat  $AB$  keinen Schnittpunkt mit der Ebene durch  $A'B'C'$ . Also hat  $AB$  keinen Schnittpunkt mit  $g$  und deswegen ist  $A'B'$  parallel zu  $g$  und damit schließlich  $AB \parallel g$ .  $\square$

Wenn schließlich  $AB \parallel A'B'$  und  $AC \parallel A'C'$ , dann muss auch  $BC \parallel B'C'$  gelten. Dies ist eine einfache Konsequenz der Strahlensätze.

Eine wichtige Variante hiervon ist folgender Satz, in der 'perspektive Lage' durch Parallelität ersetzt wird. Auffallend ist die Analogie zwischen Parallelität und Schnitt. Mit Hilfe projektiver Geometrie können alle Varianten des Satz von Desargues simultan bewiesen werden.

**Satz 5.2** („Kleiner Satz von Desargues“) Seien  $ABC$  und  $A'B'C'$  zwei ebene Dreiecke, so dass die Geraden  $AA', BB'$  sowie  $CC'$  allesamt parallel zueinander sind. Angenommen die drei Schnittpunkte  $AB \cap A'B', AC \cap A'C'$  und  $BC \cap B'C'$  existieren. Dann liegen sie auf einer Geraden  $g$  (vgl. Abbildung 5.3).

**Beweis :** Man fasse die Zeichnung als Grundriss eines Dreiecksprismas auf, das von den drei parallelen Geraden  $f, g, h$  begrenzt wird, wobei  $A, A'$  auf der Gerade  $f$ , und  $B, B'$  auf der Gerade  $g$  und  $C, C'$  auf der Gerade  $h$  liegen. Dann sind  $L, M, N$  auf der Schnittgeraden der Dreiecksebene  $E$  von  $ABC$  und  $E'$  von  $A'B'C'$ . Also liegen  $L, M, N$  auf einer Geraden.  $\square$

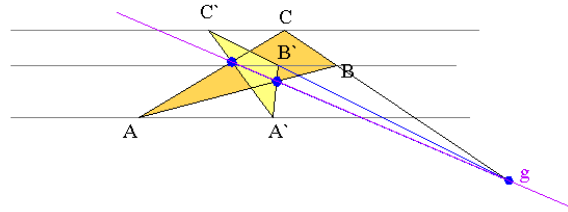


Abbildung 5.3: Der kleine Satz von Desargues

**Satz 5.3** („Satz von Pappos“) Seien  $g$  und  $h$  zwei sich schneidende Geraden in der Ebene und  $Z = g \cap h$  und seien sechs Punkte  $A_1, A_2, A_3 \in g$  und  $B_1, B_2, B_3 \in h$  gegeben. Dann sind die Schnittpunkte  $Q_{12} = A_1B_2 \cap A_2B_1$ ,  $Q_{23} = A_2B_3 \cap A_3B_2$  und  $Q_{13} = A_1B_3 \cap A_3B_1$  kollinear.

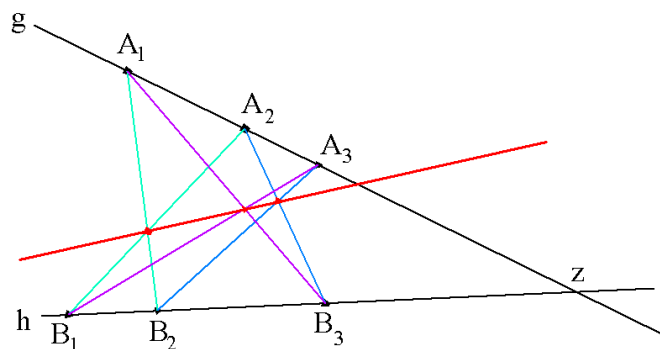


Abbildung 5.4: Der Satz von Pappos

**Beweis :** Wähle  $Z$  als 0-Punkt des Koordinatensystems und identifiziere alle Punkte mit Vektoren. Dann sind  $A_1 = v$  und  $B_1 = w$  linear unabhängig. Es seien  $A_2 = rv$ ,  $A_3 = sv$  wobei  $1, r$  und  $s$  reell und paarweise verschieden sind, und es seien entsprechend  $B_2 = tw$ ,  $B_3 = uw$  mit  $1, t$  und  $u$  reell und paarweise verschieden. Dann ist einerseits

$$Q_{12} = v + x(tw - v) = (1 - x)v + xtw,$$

und andererseits

$$Q_{12} = w + y(rv - w) = (1 - y)w + yrv.$$

---

Wir vergleichen die Koeffizienten vor  $v$  und  $w$  und erhalten  $1 - x = yr$  und  $xt = 1 - y$ . Das lineare Gleichungssystem wird durch

$$x = \frac{r-1}{rt-1}, \quad y = \frac{t-1}{rt-1}.$$

gelöst, was wir auch symmetrischer als

$$y(r-1) = x(t-1) = \frac{(t-1)(r-1)}{rt-1}.$$

schreiben. Ganz analog folgert man aus

$$Q_{13} = (1-a)v + auw = (1-b)w + bsv \quad \text{dass} \quad b(s-1) = a(u-1) = \frac{(s-1)(u-1)}{su-1},$$

und aus

$$Q_{23} = (1-c)rv + cuw = (1-d)tw + dsv,$$

dass

$$d = \frac{r(u-t)}{su-tr}, \quad c = \frac{t(s-r)}{su-tr}. \quad (5.1)$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \frac{r(t-1)}{rt-1}v + \frac{t(r-1)}{rt-1}w \\ Q_{13} &= \frac{s(u-1)}{us-1}v + \frac{u(s-1)}{us-1}w \\ Q_{23} &= \frac{rs(u-t)}{su-tr}v + \frac{ut(s-r)}{su-tr}w, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$(us-tr)Q_{23} = -su(rt-1)Q_{12} + rt(us-1)Q_{13}$$

und daher

$$-su \frac{rt-1}{us-rt} Q_{12} + rt \frac{us-1}{us-rt} Q_{13} = Q_{23}.$$

Die drei Punkte sind kollinear, weil

$$-su \frac{rt-1}{us-rt} + rt \frac{us-1}{us-rt} = 1.$$

□

**Satz 5.4** (Pappos) Die Aussage des Satzes bleibt erhalten, wenn  $g$  parallel zu  $h$  ist.

**Beweis :** Ganz ähnlich wie bei Satz 5.2.

□

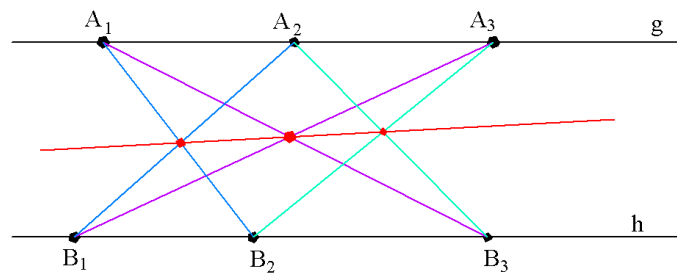


Abbildung 5.5: Satz von Pappos für parallele Geraden  $g$  und  $h$

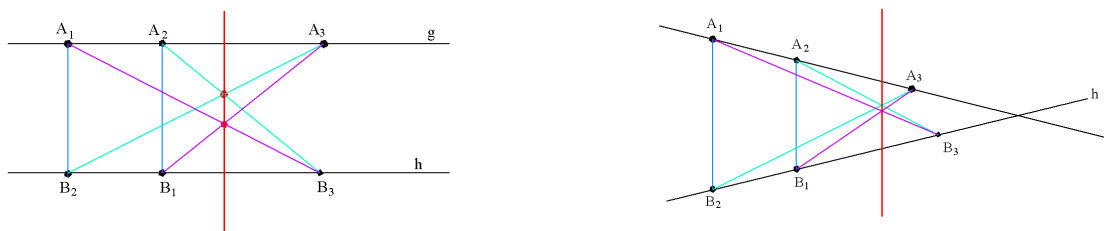


Abbildung 5.6: Degenerierte Versionen des Satz von Pappos

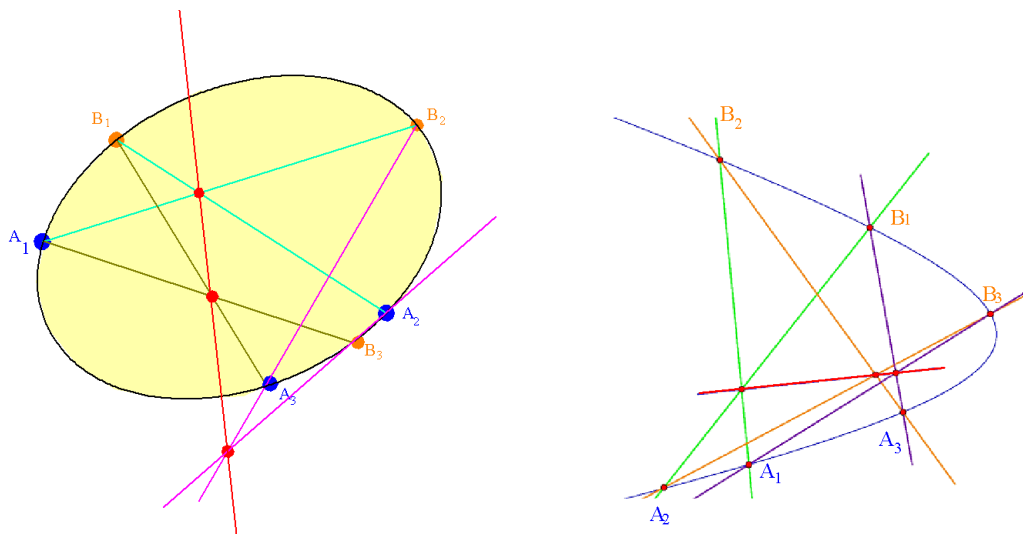


Abbildung 5.7: Satz von Pappos für Kegelschnitte

Was passiert, wenn z.B.  $A_1B_2 \parallel B_1A_2$ , also wenn gar kein Schnittpunkt  $Q_{12}$  existiert (vgl. Abbildung 5.6)? Dann ist  $Q_{23}Q_{13} \parallel A_1B_2$ , wie man entweder direkt nachrechnen kann oder wie wir in Kapitel 7 zeigen werden. Alle diese Varianten können mithilfe von projektiver Geometrie komprimiert in einer Aussage formuliert werden.

Zum Abschluss formulieren wir noch eine allgemeine Variante.

---

**Satz 5.5** (Pappos, Pascal) Sei  $K$  ein Kegelschnitt und  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 \in K$ , so dass  $Q_{12} := A_1B_2 \cap A_2B_1$  und  $Q_{13} := A_1B_3 \cap A_3B_1$  und  $Q_{23} := A_2B_3 \cap A_3B_2$  existieren. Dann liegen  $Q_{12}, Q_{13}$  und  $Q_{23}$  auf einer Geraden (vgl. Abbildung 5.7)

Satz 5.2 ist ein Spezialfall von Satz 5.5, denn zwei sich schneidende Geraden sind ein entarteter Kegelschnitt.

An dieser Stelle wird auf einen Beweis von Satz 5.5 verzichtet. Man beweist ihn rechnerisch in projektiven Koordinaten.

## 6 Affine und projektive Ebenen

Ziel dieses Kapitels ist die axiomatische Beschreibung der Geometrie in der Ebene. Dazu werden Geraden und Punkte in der Ebene abstrahiert. Genauer ist  $\mathcal{P}$  eine Menge von Punkten und  $\mathcal{G}$  eine Menge von „Geraden“, wobei jedes  $g \in \mathcal{G}$  eine Teilmenge von  $\mathcal{P}$  ist, d.h.  $g \subset \mathcal{P}$ .

**Definition 6.1** Zwei Geraden  $g, h \in \mathcal{G}$  heißen **parallel**, falls  $g \cap h = \emptyset$  (leere Menge) oder  $g = h$ . Wir schreiben in diesem Fall  $g \parallel h$ .

**Definition 6.2**  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  heißt **affine Ebene**, falls

- i) Für alle  $P, Q \in \mathcal{P}$  mit  $P \neq Q$  gibt es genau eine Gerade  $g \in \mathcal{G}$  mit  $P, Q \in g$  (**Verbindungsaxiom**);
- ii) Für alle  $g \in \mathcal{G}$  und für alle  $P \in \mathcal{P}$  gibt es genau ein  $h \in \mathcal{G}$  mit  $h \parallel g$  und  $P \in h$ . (**Existenz von Parallelen**)
- iii) Es gibt vier Punkte, von denen je drei nicht kollinear sind (**Reichhaltigkeitsaxiom**).

**Beispiele 6.3** i) Der  $\mathbb{R}^2$  mit seiner üblichen Geometrie also  $\mathcal{P} = \{\text{Punkte in } \mathbb{R}^2\}$  und  $\mathcal{G} = \{\text{Geraden in } \mathbb{R}^2\}$  ist eine affine Ebene der Ordnung <sup>1</sup>  $\infty$ .

- ii) Das kleinstmögliche Beispiel ist als Punktmenge mit den Geraden wie in Abbildung 6.1 angedeutet mit genau drei Parallelenscharen. Dies ist eine affine Ebene der Ordnung 2. Genauer ist hier  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$  und

$$\mathcal{G} = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, P_3\}, \{P_1, P_4\}, \{P_2, P_3\}, \{P_2, P_4\}, \{P_3, P_4\}\}.$$

---

<sup>1</sup>Der Begriff der Ordnung wird erst auf den folgenden Seiten definiert. Es empfiehlt sich an der entsprechenden Stelle nochmals zu diesen Beispielen zurückzukehren.

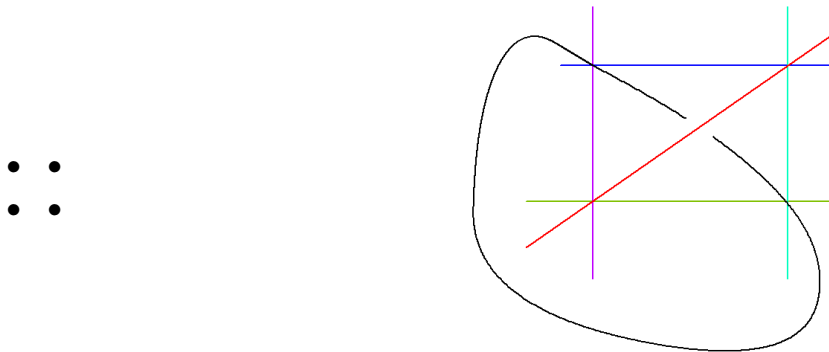


Abbildung 6.1: Affine Ebene mit vier Punkten

Dann sind die Axiome i) und iii) einer affinen Ebene offensichtlich erfüllt. Ist  $g$  eine beliebige Gerade bestehend aus zwei Punkten, so wählt man für  $h$  die Gerade bestehend aus den anderen zwei Punkten und hat damit auch die Eigenschaft ii) nachgewiesen.

Wir halten einige einfache Konsequenzen aus den Axiomen fest.

i) Je zwei Geraden  $g, h$  sind parallel oder schneiden sich in genau einem Punkt. Denn



Abbildung 6.2: Doppelschnittpunkt

ist unmöglich wegen i).

ii) Es gelten offensichtlich folgende Eigenschaften des Begriffs Parallelität.

- a) **Reflexivität:** Für alle  $g \in \mathcal{G}$  ist  $g \parallel g$ .
- b) **Symmetrie:** Für alle  $g, h \in \mathcal{G}$  folgt aus  $g \parallel h$ , dass  $h \parallel g$ .
- c) **Transitivität:** Für alle  $g, h, k \in \mathcal{G}$  folgt aus  $g \parallel h$  und  $h \parallel k$ , dass  $g \parallel k$ .

Man sagt daher, dass Parallelität eine Äquivalenzrelation ist. Zum Nachweis von c) sei  $g \parallel h$  und  $h \parallel k$  und wir nehmen an, dass  $g \neq k$  und  $g \cap k \neq \emptyset$  ist, d.h. es gibt einen Schnittpunkt  $P \in g \cap k$ . Dann besitzt  $h$  durch  $P$  zwei Parallelen, nämlich  $g$  und  $k$ . Dies ist ein Widerspruch zu ii) aus der Definition einer affinen Ebene. Für  $g \in \mathcal{G}$  heißt die Menge  $P(g) = \{h \in \mathcal{G} \text{ mit } h \parallel g\}$  die *Parallelschar* zu  $g$ .

iii) Zwei verschiedene Parallelscharen haben stets leeren Schnitt, denn haben  $P(g)$  und  $P(k)$  keinen leeren Schnitt, dann sind  $g$  und  $k$  bereits parallel und daher  $P(g) = P(k)$ .

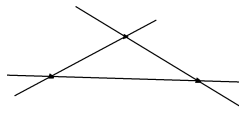


Abbildung 6.3: Geraden, die drei Parallelscharen definieren

- iv) Es gibt mindestens drei verschiedene Parallelscharen (vgl. Abbildung 6.3). Zur Begründung dieser Behauptung verwenden wir das Reichhaltigkeitsaxiom. Demnach gibt es  $P, Q, R \in \mathcal{P}$ , so dass  $P, Q, R$  nicht auf einer Geraden liegen. Wegen des Verbindungsaxioms existiert eine Gerade  $g$  mit  $P, Q \in g$  und eine Gerade  $h$  mit  $Q, R \in h$  und eine Gerade  $k$  mit  $Q, R \in k$ . Weil  $P, Q, R$  nicht auf einer Geraden liegen, gilt  $g \neq h \neq k \neq g$  und die drei Geraden haben jeweils nicht-leeren Schnitt, sind also nicht parallel.

**Satz 6.4** Auf jeder Parallelschar  $\pi$  liegen gleich viele Geraden. Ihre Anzahl (möglicherweise  $\infty$ ) ist gleich der Anzahl der Punkte auf jeder Geraden. Diese Anzahl wird Ordnung der affinen Ebene genannt.

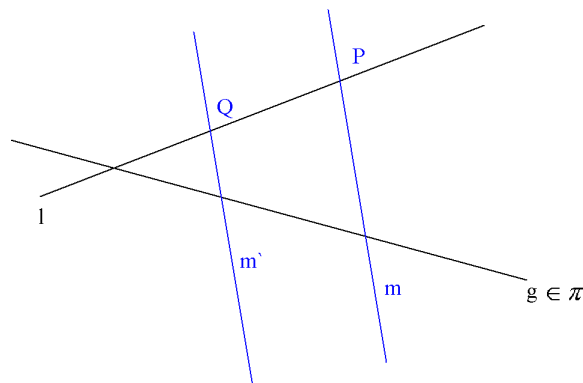


Abbildung 6.4

**Beweis :** Seien  $P(g_1)$  und  $P(g_2)$  zwei verschiedene Parallelscharen. Dann ist  $g_1 \not\parallel g_2$  und für jeden Punkt  $P \in g_1$  gibt es genau eine Gerade  $h$  mit  $h \parallel g_2$  und  $P \in h$ . Andererseits existiert für  $h \parallel g_2$  genau ein Schnittpunkt  $P \in h \cap g_1$  (da wir oben festgestellt haben, dass Doppelschnittpunkte nicht-paralleler Geraden unmöglich sind). Wir erhalten also eine Bijektion  $g_1 \longleftrightarrow P(g_2)$  zwischen Punkten auf  $g_1$  und Parallelen zu  $g_2$ . Das heißt insbesondere, dass  $g_1$  und  $P(g_2)$  gleich viele Elemente haben.

Es folgt, dass auf jeder Parallelschar gleich viele Elemente liegen, denn für Parallelscharen  $P(g_1)$  und  $P(g_2)$ , die verschieden sind, existiert (wie oben gezeigt) eine dritte Parallelschar  $P(g_3)$  mit  $P(g_3) \neq P(g_1)$  und  $P(g_3) \neq P(g_2)$ . Also gibt es zwei Bijektionen

$$P(g_1) \longleftrightarrow g_3 \longleftrightarrow P(g_2)$$



---

und daraus folgt die Behauptung.

Ebenso liegen auf jeder Geraden gleich viele Punkte. Denn zu zwei Geraden  $g_1, g_2$  gibt es eine Gerade  $g_3$  mit  $g_3 \parallel g_1$  und  $g_3 \parallel g_2$  und dann zwei Bijektionen

$$g_1 \longleftrightarrow P(g_3) \longleftrightarrow g_2.$$

Wir haben also gezeigt, dass die Anzahl der Punkte auf einer Geraden gleich der Anzahl der Geraden  $h$  einer Parallelschar ist.  $\square$

**Satz 6.5** Sei  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  eine affine Ebene der Ordnung  $n < \infty$ . Dann hat  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  genau  $n^2$  Punkte und  $n^2 + n$  Geraden.

**Beweis :** Sei  $P(g)$  eine Parallelschar. Dann liegen  $n$  Geraden in  $P(g)$  und auf jeder dieser Geraden liegen  $n$  Punkte. Es gibt also insgesamt  $n^2$  Punkte, weil alle Punkte der affinen Ebene auf einer Geraden in  $P(g)$  liegen (Parallelenaxiom). Sei nun  $P \in \mathcal{P}$  ein fester Punkt. Man zeigt leicht, dass durch  $P$  genau  $n + 1$  Geraden gehen (Übung!). Außerdem geht von jeder Parallelschar genau eine Gerade durch  $P$  (Parallelenaxiom). Es gibt also  $n + 1$  Parallelscharen und in jeder Parallelschar liegen  $n$  Geraden. Insgesamt sind das  $n(n + 1) = n^2 + n$  Geraden.  $\square$

**Bemerkungen 6.6** i) Es ist ein offenes Problem, welche natürlichen Zahlen  $n$  als Ordnungen von affinen Ebenen auftreten. Es ist nur bekannt, dass alle Primzahlpotenzen, d.h.  $n = p^r$  mit  $p$  prim und  $r \in \mathbb{N}$  auftreten. Es ist auch bekannt, dass keine affinen Ebenen der Ordnungen 6 und 10 existieren. Bereits für Ordnung 12 ist die Existenzfrage bis heute ungelöst.

ii) Das genannte Axiomensystem reicht bei weitem nicht aus, um „alle“ Sätze der Geometrie herzuleiten; nicht einmal die Sätze von Desargues und Pappos folgen daraus (es gibt affine Ebenen wie die **Moulton-Ebene**, in der der Satz von Desargues nicht gilt!).

iii) Endliche affine Ebenen haben Anwendungen in praktischen Problemen der Kombinatorik: Wie organisiert man ein faires Skatturnier für neun Teilnehmer? Mit viel Aufwand kann man alle 3-er-Kombinationen von Spielern gegeneinander antreten lassen; dann müssen insgesamt

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

Runden gespielt werden. Wenn man es aber auch als fair (genug) betrachtet, dass jeder Spieler mit jedem anderen Spieler genau in einer Runde zusammen spielt, kann man affine Geometrie verwenden. Es korrespondieren

---

Spieler  $\longleftrightarrow$  Punkte einer affinen Ebene der Ordnung 3

Runden  $\longleftrightarrow$  Geraden in dieser Ebene.

Nach dem Verbindungsaxiom treten dann je zwei Spieler genau einmal gegeneinander an. Es müssen aber nur 12 Runden gespielt werden!

- iv) Allgemeiner lösen die affinen Ebenen der Ordnung  $n$  (wenn es sie gibt) das Problem, einen „ $2 - (n^2, n, 1)$ -Blockplan“ zu konstruieren, d.h. eine Menge  $\mathcal{P}$  mit  $n^2$  Elementen (die Punktmenge der affinen Ebene), dazu eine Menge  $\mathcal{B}$  von „Blöcken“, d.h. Untermengen von  $\mathcal{P}$ , mit jeweils  $n$  Elementen (die Geraden der affinen Ebene, also  $\mathcal{B} = \mathcal{G}$ ), so dass zu je 2 verschiedenen  $P, Q \in \mathcal{P}$  genau ein  $g \in \mathcal{B}$  existiert mit  $P, Q \in g$ . Solche Blockpläne gibt es keineswegs immer! Z.B. gibt es keinen  $2 - (36, 6, 1)$ -Blockplan, was aber schwer zu beweisen ist!

Wir führen nun eine Geometrie ein, in der es keine Parallelen gibt, d.h. bei der sich zwei Geraden immer schneiden.

**Definition 6.7**  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  heißt **projektive Ebene**, falls folgende Axiome erfüllt sind.

- i) Für alle  $P, Q \in \mathcal{P}$  mit  $P \neq Q$  gibt es genau eine Gerade  $g \in \mathcal{G}$  mit  $P, Q \in g$  (**Verbindungsaxiom**);
- i) Zu je zwei Geraden  $g \neq h \in \mathcal{G}$  existiert genau ein Schnittpunkt  $P \in g \cap h$ . (**Schnittpunktaxiom**);
- ii) Es gibt vier Punkte, von denen je drei nicht kollinear sind (**Reichhaltigkeitsaxiom**).

**Beispiele 6.8** i) Eine Kugel  $S$ , bei der zwei gegenüberliegende Punkte als ein Punkt aufgefasst werden, definiert wie folgt eine projektive Ebene: d.h.

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{\{P, Q\} \mid P, Q \in S; \quad P, Q \text{ liegen gegenüber}\} \\ \mathcal{G} &= \{\text{Großkreise}\}\end{aligned}$$

Wir haben in Kapitel 3 gesehen, dass zwischen zwei verschiedenen (nicht gegenüberliegenden) Punkten genau ein Großkreis existiert. Weiterhin wissen wir, dass zwei verschiedene Großkreise sich genau in zwei gegenüberliegenden Punkten schneiden, also in einem Element in  $\mathcal{P}$ . Das Reichhaltigkeitsaxiom ist auch erfüllt (wähle vier Punkte auf einer Halbkugel, die nicht gemeinsam auf einem Großkreis liegen). Es sind also alle Axiome einer projektiven Geometrie erfüllt.

- ii) Man macht aus der affinen „Minimalebene“ eine projektive „Minimalebene“, indem man zu jeder Parallelenschar einen Schnittpunkt hinzunimmt. Die neuen Punkte werden mit  $\circ$  gekennzeichnet (vgl. Abbildung 6.5).

Eine neue Gerade, in der Abbildung gestrichelt eingezeichnet, wird ebenso benötigt, damit auch für die neuen Punkte Axiom i) erfüllt ist. Somit hat die Ebene jetzt 7 Punkte und 7 Geraden und ist projektiv. Dies ist das kleinste Beispiel, weil nach dem Reichhaltigkeitsaxiom vier Punkte wie im affinen Minimalbeispiel existieren müssen.

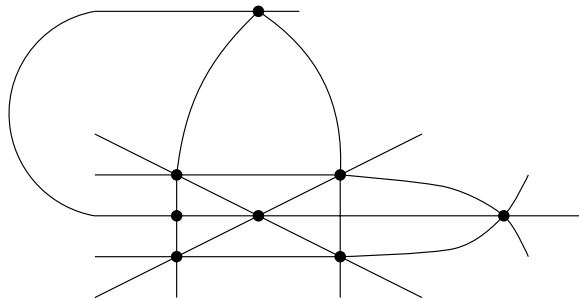


Abbildung 6.5: Projektive Ebene mit 7 Punkten und 7 Geraden

- iii) Wie kann man allgemein aus einer affinen Ebene eine projektive Ebene machen? Sei  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  eine affine Ebene. Wir wissen, dass  $\mathcal{G}$  Vereinigung von Parallelscharen ist. Für jede Parallelschar  $\pi$  fügt man einen neuen Punkt  $P_\pi$  hinzu, d.h.

$$\mathcal{P}' := \mathcal{P} \cup \{P_\pi \mid \pi \text{ Parallelschar in } (\mathcal{P}, \mathcal{G})\}$$

Jeder der neuen Punkte  $P_\pi$  wird zu jeder Geraden  $g$  in der Parallelschar  $\pi$  hinzugefügt, aber nicht zu Geraden die nicht in  $\pi$  liegen. Weiterhin wird eine neue Gerade  $u$  hinzugefügt, die alle neuen Punkte  $P_\pi$  enthält, (vgl. Abbildung 6.6). Man definiert also

$$\mathcal{G}' := \bigcup_{\pi} \{g \cup \{P_\pi\} \mid g \in \pi\} \cup \underbrace{\{\{P_\pi\}_\pi\}}_{=: u}$$

Die Punkte  $P_\pi$  heißen *Punkte im Unendlichen* und die Gerade  $u$  heißt *unendlich ferne Gerade*. Wir zeigen jetzt, dass  $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$  die Axiome einer projektiven Geometrie erfüllt.

- i) Das Verbindungsaxiom ist klar für  $P \neq Q$  in der ursprünglichen Punktmenge  $\mathcal{P}$ . Für  $P \in \mathcal{P}$  und  $Q = P_\pi$  gibt es genau eine Gerade  $g$  in der Parallelschar  $\pi$ , die durch  $P$  geht. Daher ist  $g \cup \{P_\pi\}$  die eindeutige Gerade durch  $P$  und  $P_\pi$ . Für zwei beliebige Punkte im Unendlichen ist  $u$  die einzige Gerade, die die beiden Punkte verbindet.
- ii) Das Schnittaxiom stimmt, weil zwei ursprüngliche Geraden jetzt einen Schnittpunkt haben und jede ursprüngliche Gerade die Gerade  $u$  in genau einem Punkt schneidet.
- iii) Das Reichhaltigkeitsaxiom ist ohnehin erfüllt, weil es bereits in der affinen Ebene erfüllt war.

Man nennt  $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$  auch *projektiven Abschluss von  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$* . Wenn  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  eine affine Ebene der endlichen Ordnung  $n$  war, dann hat  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  genau  $n^2$  Punkte und  $n + 1$  Parallelscharen. Folglich hat der projektive Abschluß  $n^2 + n + 1$  Punkte und  $n^2 + n + 1$  Geraden. Auf jeder Geraden liegen  $n + 1$  Punkte.

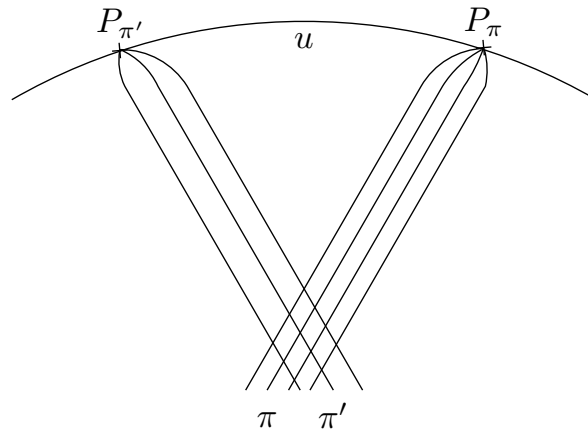


Abbildung 6.6: Neue Punkte bei der Konstruktion einer projektiven Ebene

**Beispiel 6.9** Die affine Ebene der Ordnung 3 wird zu einer projektiven Ebene mit  $3^2 + 3 + 1 = 13$  Punkten und 13 Geraden. Jede Gerade hat 4 Punkte.

Auch projektive Ebenen haben Anwendungen in der Kombinatorik, beispielsweise bei der Organisation eines Doppelkopfturniers mit 13 Spielern. Doppelkopf wird in Runden zu 4 Spielern gespielt. Es korrespondieren

Spieler  $\longleftrightarrow$  Punkte einer projektiven Ebene der Ordnung 3  
 Runden  $\longleftrightarrow$  Geraden in dieser Ebene.

Nach Axiom 1 treffen je zwei Spieler in genau einer Runde aufeinander. Es kann also ein genau 13-rundiges Turnier organisiert werden.

**Satz 6.10** Sei  $\mathbb{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$  eine projektive Ebene und  $u \in \mathcal{G}$  eine beliebige Gerade. Entfernt man  $u$  und alle Punkte auf  $u$ , so entsteht eine affine Ebene. Dies bedeutet, dass  $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$  mit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}' &:= \mathcal{P} \setminus u \\ \mathcal{G}' &:= \{g \setminus u \mid g \in \mathcal{G} \setminus \{u\}\} \end{aligned}$$

eine affine Ebene ist. Außerdem ist  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  der projektive Abschluss dieser Ebene.

**Beweis :** Wir überprüfen die Axiome der affinen Ebene für  $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$

- 
- i) Seien  $P \neq Q \in \mathcal{P}'$ . Es gibt genau eine Gerade  $g \in \mathcal{G}$  mit  $P, Q \in g$ . Diese Gerade ist nach Voraussetzung über die Lage von  $P$  und  $Q$  nicht  $u$ . Daher ist  $g \setminus u$  die einzige Gerade in  $\mathcal{G}'$ , die  $P$  mit  $Q$  verbindet.
  - ii) Sei  $g \setminus u$  eine Gerade in  $\mathcal{G}'$  und  $P \in \mathcal{P}'$ . Ist  $P \in g \setminus u$ , so ist  $g \setminus u$  eine Parallele zu  $g$  durch  $P$ , und die einzige Parallele nach dem Axiom i) einer projektiven Ebene. Also können wir ab sofort annehmen, dass  $P \notin g \setminus u$ . Sei  $Q := g \cap u$  der Schnittpunkt von  $g$  und  $u$  in  $\mathcal{P}$ . Eine Gerade  $h$  durch  $P$  ist in  $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$  parallel zu  $g$  genau dann, wenn der eindeutige Schnittpunkt von  $h$  und  $g$  in  $u$  liegt (sonst gibt es einen Schnittpunkt in  $\mathcal{P}'$ ), d.h. wenn  $h \cap g = \{Q\}$ . Das ist nach Axiom i) nur für genau eine Gerade  $h$  erfüllt.
  - iii) Seien  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{P}$ , so dass je drei von diesen Punkten auf keiner Geraden liegen. Falls die vier Punkte alle nicht in  $u$  liegen, erfüllen diese Punkte das Reichhaltigkeitsaxiom für  $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$ . Andernfalls liegen maximal zwei dieser Punkte auf  $u$ . Wir können also annehmen, dass  $P_1, P_2 \notin u$  und  $P_4 \in u$  liegt. Der Punkt  $P_3$  kann, muss aber nicht auf  $u$  liegen. Wir definieren  $P'_4 := P_1P_4 \cap P_2P_3$ . Dann gilt  $P'_4 \notin u$ , denn

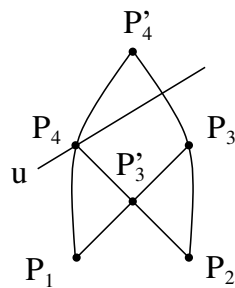


Abbildung 6.7: Schnittverhalten im Nachweis der Reichhaltigkeit

wegen  $P_1 \notin u$  und  $P_4 \in u$  ist  $P_1P_4 \neq u$  und wegen  $P_4 \notin P_2P_3$  (vgl. Abbildung 6.7) würde  $P'_4 \in u$  den Widerspruch  $P_1P_4 = u$  ergeben. Darüber hinaus definieren wir noch  $P'_3 := P_1P_3 \cap P_2P_4$ . Wegen  $P_2 \notin u$ , aber  $P_4 \in u$  und  $P_2 \notin P_1P_3$  gilt dann  $P'_3 \notin u$ . Wir behaupten, dass  $P_1, P_2, P'_3, P'_4 \in \mathcal{P}'$  das Reichhaltigkeitsaxiom für  $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$  erfüllen. Dazu muss noch überprüft werden, dass keine drei dieser Punkte auf einer Geraden liegen. Falls z.B.  $P_1, P'_3, P'_4$  auf einer Geraden  $g$  liegen würden, dann wäre dies einerseits die eindeutige Gerade von  $P_1$  nach  $P'_4$ , was  $P_4 \in g$  impliziert, und andererseits die eindeutige Gerade von  $P_1$  nach  $P'_3$ , was  $P_3 \in g$  impliziert. Also  $P_1, P_3, P_4 \in g$  im Widerspruch zur Annahme. Analog argumentiert man für die anderen Kombinationen. Also ist  $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$  eine affine Ebene.

Schließlich gilt:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Parallelenscharen von } (\mathcal{P}', \mathcal{G}') & \xleftrightarrow{1:1} \text{ Punkte auf } u \\
 \text{Parallelenschar von } g \setminus u & \mapsto g \cap u \\
 \text{Geraden } g \setminus u \text{ mit } g \cap u = Q & \longleftarrow Q
 \end{array}$$

Deswegen ist der projektive Abschluss von  $(\mathcal{P}', \mathcal{G}')$  genau  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ . □

**Folgerung 6.11** Für jede endliche projektive Ebene  $\mathbb{P}$  gibt es ein eindeutiges  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $\mathbb{P}$  genau  $n^2 + n + 1$  Punkte und  $n^2 + n + 1$  Geraden hat und auf jeder Geraden  $n + 1$  Punkte liegen. Die Zahl  $n$  heißt die Ordnung der projektiven Ebene  $\mathbb{P}$ .

Zum Abschluss formulieren wir noch das Dualitätsprinzip in projektiven Ebenen. Zur jeder Aussage über Punkte und Geraden in einer projektiven Ebene (beispielsweise: „Zwei Geraden haben genau einen Schnittpunkt“) kann man in eine duale Aussage über Geraden und Punkte übersetzen (im Beispiel: „Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade“). Ein weiteres Beispiel ist „Drei Geraden gehen durch einen Punkt“, was sich zu „Drei Punkte liegen auf einer Geraden“ dualisiert.

**Satz 6.12 (Dualitätsprinzip in projektiven Ebenen)** Zu jeder Aussage über projektive Ebenen, die aus den Axiomen hergeleitet werden kann, gibt es eine duale Aussage, die ebenfalls aus den Axiomen hergeleitet werden kann. Dabei müssen folgende Ersetzungen vorgenommen werden

Punkte	$\longleftrightarrow$	Geraden
Geraden	$\longleftrightarrow$	Punkte
Schnittpunkt	$\longleftrightarrow$	Verbindungsgerade
Verbindungsgerade	$\longleftrightarrow$	Schnittpunkt

**Beweis :** Die Axiome i) und ii) sind dual zueinander. Das Axiom iii) ist zu sich selbst dual, denn die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- a) Es gibt vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen.
- b) Es gibt vier Geraden von denen keine drei durch einen Punkt gehen.

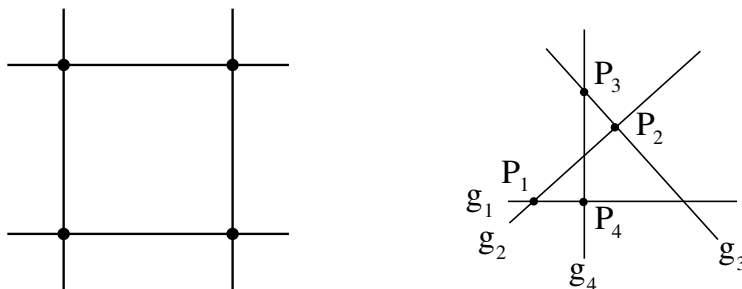


Abbildung 6.8: Zur Dualität des Reichhaltigkeitsaxioms

Zum Beweis der Implikation a)  $\Rightarrow$  b) seien vier Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Von den Geraden aus Abbildung 6.8 gehen keine drei durch einen Punkt.

---

Zum Beweis der umgekehrten Implikation b)  $\Rightarrow$  a) seien vier Geraden  $g_1, g_2, g_3, g_4$  gegeben, von denen keine drei durch einen Punkt gehen. Wir definiere  $P_1 := g_1 \cap g_2, P_2 := g_2 \cap g_3, P_3 := g_3 \cap g_4$  und  $P_4 := g_1 \cap g_4$ , vgl. Abbildung 6.8. Dann liegen von diesen Punkten keine drei auf einer Geraden.  $\square$

**Bemerkung 6.13** Auch endliche projektive Ebenen liefern Blockpläne, nämlich sogenannte  $2 - (n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ -Blockpläne, weil  $\mathbb{P}$  insgesamt  $n^2 + n + 1$  Punkte enthält, alle Blöcke (i.e. alle Geraden)  $n + 1$  Punkte enthalten, und weil zu je zwei Punkten  $P \neq Q$  genau ein Block (i.e. eine Gerade  $g$ ) existiert, die beide enthält. Der Fall  $n = 2$  gibt den Plan für ein Skat-Turnier mit 7 Teilnehmern und 7 Runden, denn in endlichen projektiven Ebenen ist auch die Anzahl der Geraden gleich  $n^2 + n + 1$ .

## 7 Reelle projektive Geometrie

Was passiert, wenn man als  $\mathbb{A}$  den  $\mathbb{R}^2$  wählt und zur projektiven Ebene  $\mathbb{P}$  erweitert? Parallelen Geraden muss also ein gemeinsamer Punkt hinzugefügt werden. Parallele Geraden werden in der  $x_1x_2$ -Ebene beschrieben durch Gleichungen

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + c &= 0 & (g) \\ ax_1 + bx_2 + c' &= 0 & (h) \end{aligned}$$

Wir wenden nun folgenden Trick an: Betrachte  $\mathbb{A}$  als die Ebene  $x_3 = 1$  im  $\mathbb{R}^3$ . Sei  $E_g$  die Ebene durch 0 und  $g$  und  $E_h$  die Ebene durch 0 und  $h$ . Das heißt

$$\left. \begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 &= 0 & (E_g) \\ ax_1 + bx_2 + c'x_3 &= 0 & (E_h) \end{aligned} \right\}$$

sind nun beides homogene lineare Gleichungen. Nun haben  $E_g, E_h$  im  $\mathbb{R}^3$  eine gemeinsame Schnittgerade  $\ell$ , gegeben durch  $x_3 = 0$  und  $ax_1 + bx_2 = 0$ . Diese Schnittgerade  $\ell$  wird ein neuer „unendlich ferner“ Punkt auf  $g$  und  $h$ . Man kann  $\mathbb{P}$  also auffassen als, die projektive Ebene mit

$$\text{Punkte} = \underbrace{\text{Punkte in } \{x_3 = 1\}}_{\text{Punkte in } \mathbb{A}} \cup \underbrace{\{\text{Geraden in } x_1x_2\text{-Ebene durch den Ursprung}\}}_{\text{Parallelenscharen in } \mathbb{A}}.$$

Beachte, dass es eine Bijektion

$$\begin{aligned} \text{Punkte in } \{x_3 = 1\} &\longleftrightarrow \{\text{Geraden durch Ursprung, die nicht in der } x_1x_2\text{-Ebene liegen}\} \\ P &\longleftrightarrow \text{Gerade durch } O \text{ und } P \end{aligned}$$

gibt und somit auch folgende Beschreibung von  $\mathbb{P}$  möglich ist:

$$\text{Punkte von } \mathbb{P} = \{\text{Räumliche Geraden durch Ursprung}\}$$

---

Ebenso kann man die Geraden in  $\mathbb{P}$  beschreiben als die Geraden von  $\mathbb{A}$  zusammen mit der unendlich fernen Gerade und man kann die Bijektion

$$\begin{aligned} \{\text{Geraden von } \mathbb{A}\} = \{\text{Geraden in } x_3 = 0\} &\longleftrightarrow \{\text{Ebenen durch den Ursprung ohne } x_1x_2\text{-Ebene}\} \\ g &\longleftrightarrow \text{Ebene durch } O \text{ und } g \end{aligned}$$

ausnutzen um einzusehen, dass

$$\boxed{\text{Geraden von } \mathbb{P} = \{\text{Räumliche Ebenen durch Ursprung}\}}$$

Man sieht leicht ein, dass die Axiome einer projektiven Geometrie erfüllt sind. Man nennt  $\mathbb{P}$  auch *reelle projektive Ebene*.

Wir kommen nun zur Beschreibung von  $\mathbb{P}$  durch Koordinaten. Auf  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$  wird eine Äquivalenzrelation definiert durch  $(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3)$  genau dann wenn es ein  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gibt, mit  $rx_i = y_i$  für  $i = 1, 2, 3$ . Die Äquivalenzklassen  $[x] = [x_1, x_2, x_3]$  entsprechen den Geraden durch 0 (d.h. den 1-dimensionalen Unterräumen von  $\mathbb{R}^3$ , aber ohne den Nullpunkt) und sind die Punkte der projektiven Ebene  $\mathbb{P} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Geraden bestehen dann aus all den Äquivalenzklassen von Punkten  $[x]$  die in einer Ebene  $E$  durch den Nullpunkt liegen, d.h. sie entsprechen 2-dimensionalen Untervektorräumen des  $\mathbb{R}^3$ . Entfernt man die Ebene  $x_3 = 0$  (d.h. die projektive Gerade  $u$ ) des  $\mathbb{R}^3$ , hat man nur noch die Äquivalenzklassen von Punkten  $[x] = [x_1, x_2, x_3]$  mit  $x_3 \neq 0$ . Aus diesen Äquivalenzklassen kann man immer einen Repräsentanten  $\frac{1}{x_3}(x_1, x_2, x_3)$  auswählen, also ein  $(x'_1, x'_2, 1)$ . Man kann diese Punkte also als Punkte der affinen Ebene  $\mathbb{A}$  mit Koordinaten  $x'_1, x'_2$  ansehen.

Wir verifizieren nun die Axiome der projektiven Geometrie ausgehend von der Definition der reellen projektiven Ebene als Äquivalenzklasse von Punkten in  $\mathbb{R}^3$ . Zwei Punkte  $[x] \neq [y] \in \mathbb{P}$  entsprechen zwei Unterräumen  $[x], [y] \subset \mathbb{R}^3$ , die zusammen einen zweidimensionalen Unterraum  $E = [x, y]$  erzeugen, der in  $\mathbb{P}$  eine Gerade beschreibt. Entsprechend erhält man das zweite Axiom: Zwei verschiedene zweidimensionale Unterräume des  $\mathbb{R}^3$  (d.h. zwei Geraden in  $\mathbb{P}$ ), sind gegeben durch zwei homogene Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= 0; \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

und haben als Schnitt einen eindimensionalen Unterraum, d.h. einen Punkt des  $\mathbb{P}$ .

An dieser Situation kann man wieder die Dualität aus Satz 6.12 studieren: Die beiden Geraden lassen sich durch  $[a_1, b_1, c_1]$  und  $[a_2, b_2, c_2]$  beschreiben (auch hier kommt es auf gemeinsame Faktoren nicht an!), schneiden sich in einem Punkt  $[x_1, x_2, x_3]$ . Man kann die Gleichungen aber auch so lesen: Die durch  $[x_1, x_2, x_3]$  gegebene Gerade, nämlich

$$\{[\xi_1, \xi_2, \xi_3] \in \mathbb{P} \mid x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0\},$$



läuft durch die Punkte  $[a_1, b_1, c_1]$  und  $[a_2, b_2, c_2]$ .

Die so verwendeten Koordinaten heißen *homogene Koordinaten*. Homogen signalisiert, dass es bei diesen Koordinaten nicht auf Multiplikation mit gemeinsamen Faktoren ungleich Null ankommt. Bei Festlegung der affinen Ebene  $\mathbb{A} \subset \mathbb{P}$  heißen die hinzuzunehmenden Punkte  $[x_1, x_2, 0]$  die *unendlich fernen Punkte*. Sie bilden zusammen die *unendlich ferne Gerade*  $x_3 = 0$ . Man beachte, dass man jede projektive Gerade  $u \subset \mathbb{P}$  zur unendlich fernen Gerade machen kann, denn  $\mathbb{P} \setminus u$  ist immer eine affine Ebene.

**Satz 7.1** Der Übergang zwischen zwei affinen Ebenen  $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2 \subset \mathbb{P}$  wird geometrisch durch eine Zentralprojektion beschrieben (in Koordinaten durch eine *gebrochen-lineare* Abbildung).

**Beweis :** Wir skizzieren die Beweisidee. Seien  $\mathbb{A}_2$  in  $\mathbb{P}$  realisiert durch  $x_3 = 0$  und  $\mathbb{A}_1$  z.B. durch  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$  mit  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Im Bild 7.1 sind beide Ebenen von der Seite als Geraden gezeichnet). Die Zentralprojektion von  $\mathbb{A}_1$  auf  $\mathbb{A}_2$  mit Zentrum 0 vermittelt eine

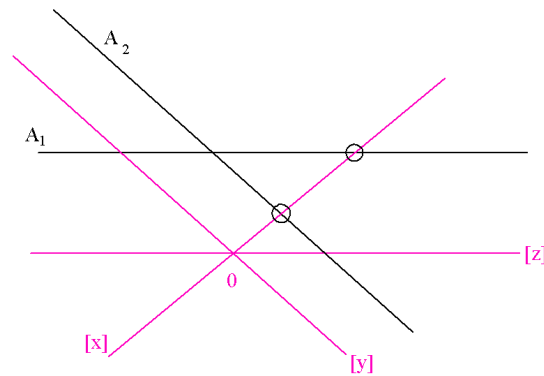


Abbildung 7.1: Übergang von zwischen den affinen Ebenen  $\mathbb{A}_1$  und  $\mathbb{A}_2$

wohldefinierte Punktabbildung

$$\mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2 : [x] \longmapsto [x]$$

mit Ausnahme von zwei Fällen: wenn  $[z]$  unendlich ferner Punkt für  $\mathbb{A}_2$  ist (kein Bild in  $\mathbb{A}_2$ ) oder wenn  $[y]$  unendlich ferner Punkt für  $\mathbb{A}_1$  ist (kein Urbild, vgl. Abbildung 7.1).  $\square$

**Satz 7.2** Bei einer Zentralprojektion  $\mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$  werden Geraden auf Geraden abgebildet (Ausnahme: wenn die unendlich ferne Gerade im Spiel ist!) und auf den abgebildeten Geraden bleibt das Doppelverhältnis der Abstände zwischen vier Punkten erhalten, d.h.

$$\frac{|P_1P_3|}{|P_1P_4|} \cdot \frac{|P_2P_3|}{|P_2P_4|} = \frac{|Q_1Q_3|}{|Q_1Q_4|} \cdot \frac{|Q_2Q_3|}{|Q_2Q_4|}$$

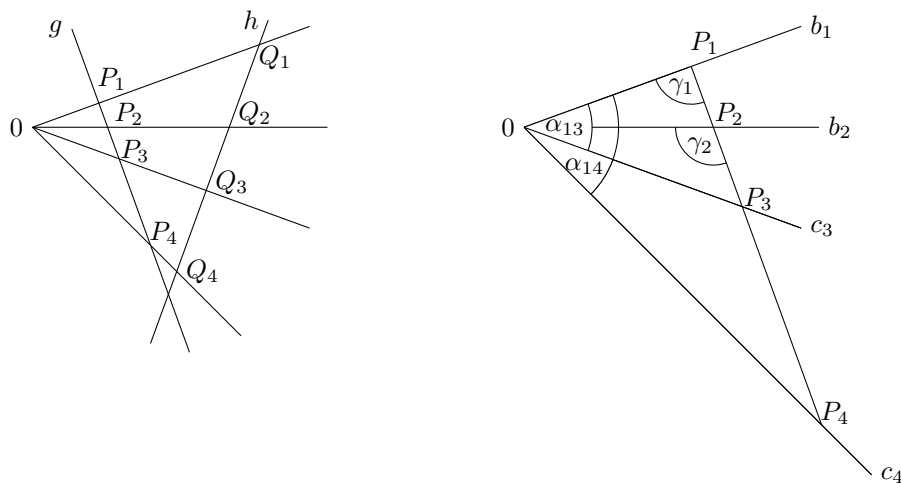


Abbildung 7.2: Invarianz des Doppelverhältnisses

**Beweis :** Wenn das Projektionszentrum 0 ins Unendliche rückt, wird die Zentralprojektion zu einer Parallelprojektion. Wenn nicht, argumentiert man mit dem Sinussatz 2.1.2 (vgl. Abbildung 7.2):

$$\left. \begin{aligned} |\overline{P_1P_3}| &= \frac{c_3}{\sin \gamma_1} \sin \alpha_{13} \\ |\overline{P_1P_4}| &= \frac{c_4}{\sin \gamma_1} \sin \alpha_{14} \end{aligned} \right\} \text{ und ganz entsprechend für } |\overline{P_2P_3}|, |\overline{P_2P_4}|,$$

D.h. die linke Seite im Doppelverhältnis wird zu  $\frac{\sin \alpha_{13}}{\sin \alpha_{14}} : \frac{\sin \alpha_{23}}{\sin \alpha_{24}}$ , hängt überhaupt nicht mehr von der Lage von  $g$  ab, bleibt darum auch für die  $Q_i$  gleich!  $\square$

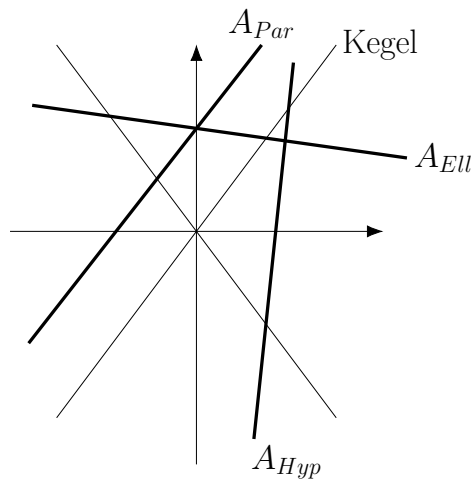


Abbildung 7.3: Von Ellipse zu Hyperbel als Kegelschnitt

**Satz 7.3** Ellipse, Hyperbel und Parabel gehen durch Zentralprojektion auseinander hervor.

---

Die Beweisidee besteht darin, dass Ellipse, Hyperbel und Parabel allesamt Schnitte eines Kegels mit verschiedenen Ebenen im  $\mathbb{R}^3$  sind und dass diese Ebenen, wie oben gezeigt, durch Zentralprojektion auseinander hervorgehen.

# Stichwortverzeichnis

affine Transformation, 34

Der entartete Fall  $w = 0.$ , 22

Der Fall  $w \neq 0.$ , 23

Doppelverhältnis, 55

entartete Fälle, 34

homogene Koordinaten, 55

Kugelkoordinaten, 17

Normale, 30

Ordnung der affinen Ebene, 46

Ordnung der projektiven Ebene, 52

Parallelenschar, 45

projektiven Abschluss von  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ , 50

Punkte im Unendlichen, 49

reelle projektive Ebene, 54

sphärische, 17

unendlich ferne Gerade, 49, 55

unendlich fernen Punkte, 55