

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei ein Dreieck $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ mit den Ecken $A = (2, 3, 2)$, $B = (2, 1, 0)$ und $C = (3, 2, -1)$.

Bestimmen Sie alle Seitenlängen und Winkel von Δ . Ist Δ rechtwinklig?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und

$$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass F genau dann ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^2 ist, wenn $b = c$, $a > 0$ und $ad - bc > 0$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V und $\| \cdot \|$ die zugehörige Norm.

Zeigen Sie

- (a) die Minkowski-Ungleichung: Für alle $x, y \in V$ gilt: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, sowie
- (b) die Parallelogramm-Identität: Für alle $x, y \in V$ gilt: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben seien die Punkte $A = (1, 1, 2)$, $B = (2, 2, -1)$, $C = (3, 2, -1)$ und $O = (0, 0, 0)$ im \mathbb{R}^3 . Weiterhin bezeichnen wir mit E die Ebene durch B , C und O .

Bringen Sie E in Hesse'sche Normalform und berechnen Sie den Abstand von A zu E .