Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2018
14. Mai 2018

Lineare Algebra L2/L5
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \ni (x,y,z) \mapsto (x-y, x+y+z, y-x) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathrm{Kern}(f)$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis C von $\mathrm{Bild}(f)$.

(d) Ergänzen Sie B zu einer Basis B' des $\mathbb{R}^3$ und C zu einer Basis C' des $\mathbb{R}^3$ und geben Sie die Abbildungsmatrix von f bzgl. B' und C' an.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Wir weisen jedem Buchstaben des Alphabets seine Stelle als Zahl zu, d.h. der Buchstabe 'A' wird zu 1, der Buchstabe 'Z' wird 26. Dies lässt uns jeden Text von höchstens 16 Zeichen in einer 4×4-Matrix W kodieren, indem wir die zugehörigen Zahlen zeilenweise in die Matrix schreiben und den Rest mit 0 füllen. Zum Beispiel wird aus "LINEARE ALGEBRA" die Matrix

$$W = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 14 & 5 \\ 1 & 18 & 5 & 0 \\ 1 & 12 & 7 & 5 \\ 2 & 18 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nehmen wir nun eine weiter 4×4 Matrix C, zu der wir eine Inverse Matrix C^{-1} mit $C \cdot C^{-1}$ der Einheitsmatrix haben, so liefert uns $C \cdot W$ eine Verschlüsselung unseres Text, den wir durch Multiplikation mit C^-1 wieder entschlüsseln können.

(a) Seien $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass $C \cdot C^{-1}$ die Einheitsmatrix ist.

(b) Berechnen Sie $C \cdot W$.

(c) Sei $W' = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -5 & -2 \\ 51 & 35 & 23 & 21 \\ 27 & 12 & 13 & -4 \\ -32 & -20 & -18 & -5 \end{pmatrix}$ ein Verschlüsselter Text.

Bestimmen Sie den Klartext $C^{-1} \cdot W$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei K ein Körper, $\lambda \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die $n \times n$-Matrizen

$$M_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & \lambda & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & 1 & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & & \\ & & & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

mit Nullen außerhalb der Diagonalen und Einsen auf der Diagonalen mit Ausnahme des i-ten Eintrag, welcher gleich λ ist, bzw. mit Einsen an den Einträgen (i,j), (j,i) und (k,k) für $k \notin \{i,j\}$ sowie Nullen außerhalb. Sei weiterhin

$$e_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c c} \begin{array}{c} \text{j-te Spalte} \\ \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & & & 0 \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & & & 0 & & & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{i-te Zeile} \end{array}$$

die Matrix, deren einziger von Null verschiedener Eintrag λ an der Stelle (i,j) ist und schließlich

$$E_{ij}(\lambda) = E_n + e_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \lambda & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Zeigen Sie, dass Linksmultiplikation von $M_i(\lambda)$, V_{ij} und $E_{ij}(\lambda)$ die entsprechenden Gaußschritte auf A anwendet.

(b) Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Geben Sie mit Hilfe des Gaußverfahrens eine Matrix B an, so dass BA die Einheitsmatrix ist.

Abgabe bis **10:00** am **Dienstag, den 22. Mai** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.