Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2018
7. Mai 2018

Lineare Algebra L2/L5
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{und} \quad V = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Unterräume des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie Basen und die Dimensionen von U, V und $U \cap V$ an.

Finden Sie außerdem einen Untervektorraum $W \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass $(U \cap V) \oplus W = \mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Überprüfen und begründen Sie, ob folgende Abbildungen linear sind:

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x) - 1$;

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;

(c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x + 2$;

(d) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien V und W Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Wir bezeichnen das Urbild der $0 \in W$ als $\operatorname{Kern} f := f^{-1}(0) \subseteq V$.

Zeigen Sie: f ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{Kern} f = \{0\}$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien V, W K-Vektorräume, $I = \{1, \dots, n\}$, $\{b_i \mid i \in I\}$ eine Basis von V und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

Zeigen Sie:

(a) f ist surjektiv $\iff$ $[\{f(b_i) \mid i \in I\}] = W$.

(b) f ist injektiv $\iff$ $\{f(b_i) \mid i \in I\}$ ist linear unabhängig.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3.

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 14. Mai** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.