Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2018
27. April 2018

Lineare Algebra L2/L5
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien V ein Vektorraum und $U, W \subseteq V$ Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) Ist $U \subseteq W$, so ist $[U] \subseteq [W]$.

(b) $[U] = U$ genau dann, wenn U ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Tupel von Elementen aus V linear unabhängig sind, ein Erzeugendensystem oder eine Basis bilden.

(a) $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, \ldots, v_{n-1} + v_n)$;

(b) $(v_1, v_1 + v_2, \ldots, v_1 + \cdots + v_n)$.

Ergänzen Sie jeweils die linear unabhängigen Tupel, die noch keine Basis bilden, zu einer Basis von V.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, sowie $U = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \subseteq \mathbb{R}^3$.

Zeigen Sie, dass $\{b_1, b_2\}$ eine Basis von U ist und geben Sie die Darstellung des Vektors

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \in U$$

bezüglich dieser Basis an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei V ein Vektorraum und $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ linear unabhängig.

Zeigen Sie: Für $v_{n+1} \in V$ ist $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ genau dann linear unabhängig, wenn $v_{n+1} \notin [\{v_1, \ldots, v_n\}]$ ist.

Abgabe bis **10:00** am **Montag, den 8. Mai** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.