

## Übungsblatt 7

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien  $f, g: M^\bullet \rightarrow N^\bullet$  zwei Abbildungen von Komplexen und  $h: f \Rightarrow g$  eine Homotopie.

Zeigen Sie: Dann ist  $H^n(f) = H^n(g)$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ .

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie das Hufeisenlemma: Sei  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln und seien  $P'_\bullet \rightarrow M'$  und  $P''_\bullet \rightarrow M''$  projektive Auflösungen, so gibt es eine projektive Auflösung  $P_\bullet \rightarrow M$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert und die Spalten exakt sind:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \xrightarrow{\varepsilon'_2} & P'_1 & \xrightarrow{\varepsilon'_1} & P'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & M' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \xrightarrow{\varepsilon_2} & P_1 & \xrightarrow{\varepsilon_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \xrightarrow{\varepsilon''_2} & P''_1 & \xrightarrow{\varepsilon''_1} & P''_0 & \xrightarrow{\varepsilon''} & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei  $R$  ein Ring und  $I, J \subseteq R$  Ideale. Zeigen Sie:

- (a)  $\text{Tor}_1^R(R/I, R/J) \cong (I \cap J)/IJ$ .
- (b)  $\text{Tor}_2^R(R/I, R/J) \cong \text{Kern}(I \otimes_R J \rightarrow IJ)$ .

*Hinweis:* Verwenden Sie ohne Beweis, dass  $\text{Tor}_i^R(M, N) \cong \text{Tor}_i^R(N, M)$  ist.

#### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei  $M$  ein  $\mathbb{Z}$ -Modul,  $N$  ein  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Modul und  $d$  ein Teiler von  $n$ . Zeigen Sie:

$$(a) \operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, M) = \begin{cases} M/dM, & \text{falls } i = 0, \\ \{m \in M : dm = 0\}, & \text{falls } i = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
$$(b) \operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, N) = \begin{cases} N/dN, & \text{falls } i = 0, \\ \{m \in N : dm = 0\}/(n/d)N, & \text{falls } i > 0 \text{ ungerade,} \\ \{m \in N : (n/d)m = 0\}/dN, & \text{falls } i > 0 \text{ gerade.} \end{cases}$$

---

Abgabe bis Beginn der Übung um 14:00 am Mittwoch, den 30. Mai.