**Goethe-Universität Frankfurt**
**Institut für Mathematik**
Sommersemester 2018
9. Mai 2018

**Kommutative Algebra**
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Dr. Jonathan Zachhuber

# Übungsblatt 5

## Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei $G$ eine Gruppe, $\mathcal{G}$ die zugehörige Kategorie, sei $G$-**Set** die Kategorie der Mengen mit einer $G$-Operation (Morphismen sind $G$-äquivariante Abbildungen) und sei $\mathbf{Hom}(\mathcal{G}, \mathbf{Set})$ die Kategorie der Funktoren von $\mathcal{G}$ nach **Set** (mit natürlichen Transformationen als Morphismen).

Geben Sie einen Funktor $\mathcal{F}\colon \mathbf{Hom}(\mathcal{G}, \mathbf{Set}) \to G\text{-}\mathbf{Set}$ an, so dass es für alle Objekte $f, f'$ von $\mathbf{Hom}(\mathcal{G}, \mathbf{Set})$ die Zuordnung $\mathcal{F}\colon \operatorname{Hom}(f, f') \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}(f), \mathcal{F}(f'))$ bijektiv ist und es zu jedem $M$ in $G$-**Set** ein $f \in \operatorname{Hom}(\mathcal{G}, \mathbf{Set})$ gibt, so dass $\mathcal{F}(f) \cong M$ ist.

(b) Sei $k$-**Vek** die Kategorie endlich-dimensionaler $k$-Vektorräume und $\mathcal{F}\colon k\text{-}\mathbf{Vek} \to k\text{-}\mathbf{Vek}$ der Bidualraumfunktor.

Zeigen Sie, dass der Einsetzungsmorphismus eine natürliche Transformation von der Identität zu $\mathcal{F}$ induziert.

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\varphi\colon A \to B$ in $\mathcal{C}$.

Wir nennen $\varphi$ einen *Monomorphismus*, falls für alle Objekte $C$ in $\mathcal{C}$ und alle Pfeile $x, y\colon C \to A$ aus $\varphi \circ x = \varphi \circ y$ bereits $x = y$ folgt.

Wir nennen $\varphi$ einen *Epimorphismus*, falls für alle Objekte $C$ in $\mathcal{C}$ und alle Pfeile $x, y\colon B \to C$ auf $x \circ \varphi = y \circ \varphi$ bereits $x = y$ folgt.

(a) Zeigen Sie, dass in **Set** die Monomorphismen genau den injektiven und die Epimorphismen genau den surjektiven Abbildungen entsprechen.

(b) Zeigen Sie, dass in **Grp** die Monomorphismen genau den injektiven und die Epimorphismen genau den surjektiven Gruppenhomomorphismen entsprechen.

*Hinweis*: Finden Sie eine Menge $M$, auf der $B$ operiert, so dass es einen $B$-Fixpunkt $m \in M$ und einen $\varphi(A)$-Fixpunkt $m' \in M$ gibt, der von $B$ nicht festgehalten wird.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ in **Rng** ein Epimorphismus, aber *nicht* surjektiv ist.

(d) Eine abelsche Gruppe $G$ heißt *divisibel*, falls es zu jedem $g \in G$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a \in G$ mit $na = g$ gibt. Wir bezeichnen die Kategorie der divisiblen abelschen Gruppen mit **Div-Ab** (Morphismen sind Gruppenhomomorphismen).

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ in **Div-Ab** ein Monomorphismus, aber *nicht* injektiv ist.

## Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{C}$ eine (lokal kleine) Kategorie und $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ein (kovarianter) Funktor.

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$y\colon \operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}(C,-),\mathcal{F}) \to \mathcal{F}(C), \quad \eta \mapsto \eta_C(\mathrm{id}_C)$$

für jedes Objekt $C$ in $\mathcal{C}$ eine Bijektion ist.

Folgern Sie, dass es einen Funktor $\mathcal{Y}\colon \mathcal{C}^\vee \to \operatorname{Hom}(\mathcal{C},\mathbf{Set})$ mit $\operatorname{Hom}(C,C') \cong \operatorname{Hom}(\mathcal{Y}(C),\mathcal{Y}(C'))$ gibt.

## Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei folgendes kommutatives Diagram von $R$-Moduln, in dem die Zeilen exakt seien:

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r, "\alpha'"] & N_2 \arrow[r, "\beta'"] & N_3 \arrow[r, "\gamma'"] & N_4 \arrow[r, "\delta'"] & N_5
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $f_1$ surjektiv und sind $f_2$ und $f_4$ injektiv, so ist $f_3$ injektiv.

(b) Ist $f_5$ injektiv und sind $f_2$ und $f_4$ surjektiv, so ist $f_3$ surjektiv.

---

**Abgabe** bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 16. Mai**.