Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2018
18. April 2018

Kommutative Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring. Wir nennen ein Ideal $\mathfrak{m} \subsetneq R$ ein *maximales Ideal*, wenn für jedes Ideal $I \supseteq \mathfrak{m}$ bereits $I = \mathfrak{m}$ oder $I = R$ gilt.

(a) Sei $I \subsetneq R$ ein echtes Ideal. Zeigen Sie: Es existiert ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subsetneq R$ mit $I \subseteq \mathfrak{m}$.

Hinweis: Lemma von Zorn.

(b) Sei $\mathfrak{m} \subsetneq R$ ein maximales Ideal. Zeigen Sie: $R/\mathfrak{m}$ ist ein Körper.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring.

Zeigen Sie: Ist $R^n \cong R^m$, so ist bereits $n = m$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. M heißt *irreduzibel* oder *einfach*, falls $M \neq \{0\}$ ist und M keine echten Untermoduln besitzt. Zeigen Sie:

(a) M ist genau dann irreduzibel, wenn $M \neq \{0\}$ von jedem Element $\neq 0$ erzeugt wird.

(b) M ist genau dann irreduzibel, wenn es ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subsetneq R$ mit $M \cong R/\mathfrak{m}$ gibt.

(c) Seien M und N irreduzible R-Moduln. Dann ist $\varphi\colon M \to N$ stets 0 oder ein Isomorphismus.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Geben Sie für folgende Untermoduln eine Basis und die zugehörigen Elementarteiler an:

(a) $\langle (1,0,-1), (2,-3,1), (0,3,1), (3,1,5) \rangle \subseteq \mathbb{Z}^3$;

(b) $\langle (2x-1, x, x^2+3), (x, x, x^2), (x+1, 2x, 2x^2-3) \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x]^3$;

(c) $\{(x,y,z) : x + 2y + 3z = 0,\ x + 4y + 9z = 0\} \subseteq \mathbb{Z}^3$.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 25. April**.