Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2018
12. April 2018

Kommutative Algebra
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 1

In dieser Veranstaltung sind, wenn nicht anders angegeben, alle Ringe als kommutativ und mit 1 vorausgesetzt.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei A ein Ring. Zeigen Sie: Ist $x \in A$ nilpotent, d.h. $\exists n \in \mathbb{N}$, so dass $x^n = 0$, so ist $1 + x \in A^\times$, d.h. eine Einheit in A.

(b) Sei $A \neq 0$ ein Ring. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

  (i) A ist ein Körper.

  (ii) $\langle 0 \rangle$ und $\langle 1 \rangle = A$ sind die einzigen Ideale.

  (iii) Für jeden Ring $R \neq 0$ und jeden Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \to R$ gilt: φ ist injektiv.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zu einer Menge S definieren wir die *freie Gruppe* $F(S)$ auf S als die Menge der *Wörter* $a := s_1^{e_1} s_2^{e_2} \cdots s_n^{e_n}$ mit $s_i \in S$ und $e_i \in \mathbb{Z}$ modulo der Äquivalenzrelationen $s^{e_1} s^{e_2} = s^{e_1+e_2}$ und $s^0 =$ (das leere Wort). Dann wird $F(S)$ durch Verkettung von Wörtern zu einer Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass $F(S)$ folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllt: Für jede Gruppe G und jede Abbildung $f\colon S \to G$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon F(S) \to G$, so dass $f = \varphi \circ \iota$ und $\iota\colon S \to F(S)$ die Inklusion ist.

(b) Ist S eine beliebige Menge und $R \subseteq F(S)$ eine Teilmenge, die *Relationen*, so definieren wir $\langle S \mid R \rangle$ als den Quotienten von $F(S)$ nach der normalen Hülle von R. Insbesondere sehen wir so, dass wir eine Gruppe G mit Erzeugendensystem $S \subseteq G$ und $R = \operatorname{Kern}(F(S) \to G)$ als $G = \langle S \mid R \rangle$ schreiben können.

  Zu zwei Gruppen $G = \langle S_G \mid R_G \rangle$ und $H = \langle S_H \mid R_H \rangle$ definieren wir das *freie Produkt*

$$G * H := \langle S_G \sqcup S_H \mid R_G \sqcup R_H \rangle.$$

  Zeigen Sie, dass $G * H$ die universelle Abbildungseigenschaft der direkten Summe (der Gruppen) erfüllt.

(c) Geben Sie zwei Gruppen G, H an, so dass $G * H$ nicht isomorph zum direkten Produkt $G \times H$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R ein nullteilerfreier Ring, M ein R-Modul und $M_{\text{Tor}} \subseteq M$ die Torsionselemente.

(a) Zeigen Sie, dass M_{Tor} ein Untermodul ist und dass M/M_{Tor} torsionsfrei ist.

(b) Seien $M_i \subseteq M$ Untermoduln für $i \in I$, so dass $M = \langle \cup M_i \rangle$ und für alle $i \in I$ gelte

$$M_i \cap \left\langle \bigcup_{j \neq i} M_j \right\rangle = \{0\}.$$

Zeigen Sie: $M \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $N \subseteq M$ R-Moduln.

(a) Geben Sie eine Bijektion

$$\{U \subseteq M/N \text{ Untermodul}\} \longleftrightarrow \{U \subseteq M \text{ Untermodul} : N \subseteq U \subseteq M\} \quad \text{an.}$$

(b) Seien nun N, M, P R-Moduln und $\varphi\colon N \to M$ injektiv, $\psi\colon M \to P$ surjektiv und $\operatorname{Bild} \varphi = \operatorname{Kern} \psi$. Dann schreiben wir

$$0 \to N \to M \to P \to 0$$

und bezeichnen dies als *kurze exakte Sequenz*.

Seien nun $\ell_R(N), \ell_R(M), \ell_R(P) < \infty$. Zeigen Sie: $\ell_R(M) = \ell_R(N) + \ell_R(P)$.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 18. April**.