**Goethe-Universität Frankfurt**
**Institut für Mathematik**
Wintersemester 2017/18
21. Dezember 2017

**Riemannsche Flächen**
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

# Weihnachtsübungsblatt

## Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $X$ ein topologischer Raum.

(a) Zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ definieren wir

$$\mathcal{B}_X(U) \coloneqq \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig und beschränkt}\}.$$

Zeigen Sie: $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ ist eine Prägarbe aber keine Garbe.

(b) Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf $X$ und $U \subseteq X$ offen. Sei weiterhin $U_i$ eine Überdeckung von $U$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Sind $f, g \in \mathcal{F}(U)$ und ist $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ für alle $i$, so ist $f = g$.

(ii) Ist $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $f_p = 0$ für alle $p \in U$, so ist $f = 0$.

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $X$ ein topologischer Raum.

(a) Geben Sie Prägarben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf $X$ an, so dass $\mathcal{F}_p \cong \mathcal{G}_p$ für alle $p \in X$, aber $\mathcal{F} \ncong \mathcal{G}$ ist.

(b) Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf $X$ und seien $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ Garbenmorphismen. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist exakt.

(ii) $0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ ist für jedes offene $U \subseteq X$ exakt.

(c) Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf $X$ und seien $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ Garbenmorphismen. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ ist exakt.

(ii) Zu jedem $U \subseteq X$ und zu jedem $t \in \mathcal{G}(U)$ existieren eine Überdeckung $U_i$ von $U$, sowie $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ so dass $s_i$ ein Urbild von $t|_{U_i}$ ist.

## Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Berechnen Sie $\mathrm{H}^1(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}, \mathbb{Z})$.

### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $X$ eine riemannsche Fläche.

(a) Seien $\mu_n \coloneqq \{z \in \mathbb{C}^* : z^n = 1\} \subset \mathbb{C}^*$ die Gruppe der $n$-ten Einheitswurzeln und $\underline{\mu_n}$ die konstante Garbe zu $\mu_n$ auf $X$.

Zeigen Sie, dass die Sequenz $1 \to \underline{\mu_n} \to \mathcal{O}_X^* \xrightarrow{\cdot^n} \mathcal{O}_X^* \to 1$ exakt ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Sequenz $0 \to \Omega_X \to \mathcal{E}_X^{1,0} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{E}_X^{1,1} \to 0$ exakt ist.

## Frohe Weihnachten und einen gutes neues Jahr!

---

**Abgabe** bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 10. Januar 2018**.