Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2017/18
9. November 2017

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zu einer Menge S definieren wir die *freie Gruppe* $F(S)$ auf S als die Menge der *Wörter* $a \coloneqq s_1^{e_1} s_2^{e_2} \cdots s_n^{e_n}$ mit $s_i \in S$ und $e_i \in \mathbb{Z}$ modulo der Äquivalenzrelationen $s^{e_1} s^{e_2} = s^{e_1+e_2}$ und $s^0 =$ (das leere Wort). Dann wird $F(S)$ durch Verkettung von Wörtern zu einer Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass $F(S)$ folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllt: Für jede Gruppe G und jede Abbildung $f\colon S \to G$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon F(S) \to G$, so dass $f = \varphi \circ \iota$ und $\iota\colon S \to F(S)$ die Inklusion ist.

(b) Ist S eine beliebige Menge und $R \subseteq F(S)$ eine Teilmenge, die *Relationen*, so definieren wir $\langle S \mid R \rangle$ als den Quotienten von $F(S)$ nach der normalen Hülle von R. Insbesondere sehen wir so, dass wir eine Gruppe G mit Erzeugendensystem $S \subseteq G$ und $R = \mathrm{Kern}(F(S) \to G)$ als $G = \langle S \mid R \rangle$ schreiben können.

Zu zwei Gruppen $G = \langle S_G \mid R_G \rangle$ und $H = \langle S_H \mid R_H \rangle$ definieren wir das *freie Produkt*

$$G * H \coloneqq \langle S_G \sqcup S_H \mid R_G \sqcup R_H \rangle.$$

Seien weiterhin U eine Gruppe und $\varphi\colon U \to G$ und $\psi\colon U \to H$ Homomorphismen, sowie N die normale Hülle der Elemente $\varphi(u)\psi(u)^{-1}$ für $u \in U$. Dann definieren wir das *amalgamierte Produkt* von G und H bzgl. U (und φ und ψ) als

$$G *_U H \coloneqq (G * H)/N.$$

Zeigen Sie, dass $G *_U H$ das Pushout (Kofaserprodukt) in der Kategorie der Gruppen ist, d.h. zu jeder Gruppe P und Morphismen $f\colon G \to P$ und $g\colon H \to P$ mit $f \circ \varphi = g \circ \psi$ existiert genau ein Morphismus $\Phi\colon G *_U H \to P$, so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
P & & \\
& G *_U H \arrow[ul, dashed, "\exists!\Phi"'] & H \arrow[l] \arrow[ull, bend right, "g"'] \\
& G \arrow[u] \arrow[uul, bend left, "f"] & U \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Stellen Sie folgende Gruppen als amalgamiertes Produkt zyklischer Gruppen dar.

(a) $\langle x, y \mid y^6,\ x^3y^3 \rangle$

(b) $\langle x, y \mid x^5,\ y^{10},\ x^3y^8 \rangle$

(c) $\langle x, y \mid x^4,\ y^6,\ x^3y^3 \rangle$

(d) $\langle x, y \mid x^5,\ y^6,\ x^3y^3 \rangle$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von den Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

Geben Sie einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ an.

Hinweis: Betrachten Sie ST.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zu einer endlichen topologischen Überlagerung $f\colon Y \to X$ und einem Punkt $x \in X$ definieren wir die *Monodromiedarstellung*

$$\rho_x\colon \pi_1(X, x) \to \mathrm{Aut}(f^{-1}(x)), \quad \gamma \mapsto [y \mapsto \tilde{\gamma}_y(1)].$$

Dabei ist $\tilde{\gamma}_y$ der Lift von γ, der bei $y \in f^{-1}(x)$ beginnt, und Aut bezeichnet die Bijektionen der endlichen Menge.

Sei nun $Y \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x(x-1)(x-2)\} \subset \mathbb{C}^2$ und $\pi\colon Y \to \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto x$.

Weiterhin setzen wir $\tilde{\mathbb{C}} \coloneqq \mathbb{C} \setminus \{0,1,2\}$ und $\tilde{Y} \coloneqq \pi^{-1}(\tilde{\mathbb{C}}) = Y \setminus \{(x,y) \in Y : y = 0\}$.

Seien $x \in \tilde{\mathbb{C}}$ und $y_0 \in f^{-1}(x)$ fest gewählt.

(a) Bestimmen Sie die Monodromiedarstellung ρ_x zu der Überlagerung $\pi\colon \tilde{Y} \to \tilde{\mathbb{C}}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\pi_*\pi_1(\tilde{Y}, y_0) = \mathrm{Kern}\,\rho_x$ ist.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 15. November**.