Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2017/18
1. November 2017

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien X, Y zusammenhängende Riemannsche Flächen, $f\colon X \to Y$ holomorph und endlich. Zeigen Sie:

(a) f ist surjektiv.

(b) Sei $y \in f(X)$ und U eine Umgebung von $f^{-1}(y)$. Dann existiert eine Umgebung V von y mit $f^{-1}(V) \subset U$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien X, Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *topologische Überlagerung*, wenn f surjektiv ist und jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung V besitzt, zu der offene Mengen $U_i \subseteq X$ $(i \in I)$ mit

$$f^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$$

existieren, so dass $f|_{U_i}\colon U_i \to V$ ein Homöomorphismus ist. Zeigen Sie:

(a) Sind X, Y Riemannsche Flächen, und $f\colon X \to Y$ eine unverzweigte Überlagerung, dann ist f eine topologische Überlagerung.

(b) Ist $f\colon X \to Y$ eine topologische Überlagerung und Y eine Riemannsche Fläche, dann gibt es eine eindeutige komplexe Struktur auf X, so dass f eine holomorphe, unverzweigte Überlagerung ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei $f\colon X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zusammenhängender Riemannscher Flächen und sei $x \in X$. Zeigen Sie, dass für jede Karte (U, g) um x und jede Karte (V, h) um $f(x)$ gilt:

$$\mathrm{ord}_x(f) = \min\{k \in \mathbb{N}_0 : (h \circ f \circ g^{-1})^{(k)}(g(x)) \neq 0\}.$$

(b) Setzen Sie die Abbildung

$$j\colon \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto 256 \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(z-1)^2}$$

zu einer holomorphen Abbildung

$$\hat{\jmath}\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

fort und bestimmen Sie die Verzweigungspunkte sowie den Grad von $\hat{\jmath}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph und seien $\gamma_0, \gamma_1\colon [0,1] \to G$ stückweise stetig differenzierbare Wege. Zeigen Sie: Sind γ_0 und γ_1 homotop, dann gilt

$$\int_{\gamma_0} f \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f \mathrm{d}z.$$

Folgern Sie daraus, dass $\mathbb{C}^*$ nicht einfach zusammenhängend ist.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 8. November**.