Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2017/18
27. Oktober 2017

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$c\colon \mathbb{H} \to \mathbb{D}, \quad \tau \mapsto \frac{\tau - \mathrm{i}}{\tau + \mathrm{i}}.$$

Zeigen Sie, dass c biholomorph ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathbb{C}[[z]]$ eine Potenzreihe.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann invertierbar ist (d.h. es existiert ein $g \in \mathbb{C}[[z]]$ mit $fg(z) = 1$), wenn $a_0 \in \mathbb{C}^*$ ist.

(b) Sei nun f invertierbar mit Konvergenzradius $\rho \neq 0$. Zeigen Sie, dass auch f^{-1} einen echt positiven Konvergenzradius hat.

(c) Sei f invertierbar mit Konvergenzradius $\rho(f)$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Potenzreihe $g \in \mathbb{C}[[z]]$ und $\rho(g) > 0$ gibt, so dass $g^n(z) = f(z)$ für alle $|z| < \rho(g)$ ist.

Hinweis: Verkettungen analytischer Funktionen sind analytisch.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $n > 1$, $a_n > 0$ und $\hat{f}\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ die Fortsetzung von f durch $\hat{f}(\infty) := \infty$.

Zeigen Sie, dass $\hat{f}$ holomorph ist und bestimmen Sie $\mathrm{ord}_\infty(\hat{f})$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $X := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x(x-1)(x-2)\} \subset \mathbb{C}^2$ und $\pi\colon X \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x$.

(a) Geben Sie einen komplexen Atlas von X an.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz über implizit definierte Funktionen.

(b) Geben Sie Punkte $P, Q \in X$ an, so dass $\mathrm{ord}_P(\pi) = 1$ und $\mathrm{ord}_Q(\pi) = 2$ ist.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 1. November**.