Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2017/18
24. Januar 2018

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe, die holomorph und effektiv (d.h. $G \to \mathrm{Aut}(X)$ ist injektiv) auf einer Riemannschen Fläche X operiert.

(a) Wir versehen den Bahnenraum X/G mit der Quotiententopologie.

Zeigen Sie, dass X/G Hausdorffsch ist.

(b) Zeigen Sie: Für $p \in X$ ist $\mathrm{Stab}_p(G) = \{g \in G : g(p) = p\}$ zyklisch.

(c) Zeigen Sie: $\{p \in X : \mathrm{Stab}_p(G) \neq \{0\}\}$ ist diskret.

(d) Sei $p \in X$. Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung U von p gibt, so dass:

(i) U ist $\mathrm{Stab}_p(G)$-invariant;

(ii) $U \cap g \cdot U = \emptyset$ für alle $g \notin \mathrm{Stab}_p(G)$;

(iii) die Abbildung $\alpha\colon U/\mathrm{Stab}_p(G) \to X/G$, die durch $q \mapsto G \cdot q$ induziert wird, ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild; und

(iv) $\mathrm{Stab}_p(G)$ operiert frei auf $U \setminus \{p\}$.

(e) Versehen Sie X/G mit Karten, so dass $\pi\colon X \to X/G$ holomorph von Grad $|G|$ ist und der Verzweigungsindex $\mathrm{ord}_p(\pi) = |\mathrm{Stab}_p(G)|$ für alle $p \in X$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Seien X, Y kompakte Riemannsche Flächen, $f\colon X \to Y$ nicht konstant und holomorph und $\omega \neq 0$ eine Differentialform auf Y.

Bestimmen Sie $\mathrm{ord}_p(f^*\omega)$ für alle $p \in X$.

(b) Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, $G \subseteq \mathrm{Aut}(X)$ eine endliche Untergruppe und $\pi\colon X \to X/G$ die Quotientenabbildung. Weiterhin bezeichne $\mathrm{H}^0(X, \Omega_X)^G$ den G-invarianten Unterraum von $\mathrm{H}^0(X, \Omega_X)$.

Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $\mathrm{H}^0(X/G, \Omega_{X/G}) \to \mathrm{H}^0(X, \Omega_X), \omega \mapsto \pi^*\omega$ injektiv mit Bild $\mathrm{H}^0(X, \Omega_X)^G$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X die durch $U_1 : x^4 + y^4 = 1$ und $U_1 : w^4 + 1 = z^4$ gegebene Riemannsche Fläche (siehe Blatt 11, Aufgabe 1). Sei weiterhin $p = (0, \mathrm{i}) \in U_1 \subset X$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ord}_p(y - \mathrm{i})\dfrac{\mathrm{d}y}{x^3} = 4$ ist.

(b) Folgern Sie, dass X nicht hyperelliptisch ist.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 31. Januar**.