Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2017/18
17. Januar 2018

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Gegeben Sei eine Riemannsche Fläche X durch Verkleben von

$$U_1 \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : x^4 + y^4 = 1\} \quad \text{und} \quad U_2 \coloneqq \{(w,z) \in \mathbb{C}^2 : w^4 + 1 = z^4\}$$

entlang der offenen Teilmengen $U_1 \cap \{y \neq 0\}$ und $U_2 \cap \{z \neq 0\}$ vermöge der Identifikationen

$$y \longleftrightarrow \frac{1}{z} \quad \text{und} \quad x \longleftrightarrow \frac{w}{z}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\varphi_1 \colon U_1 \to \mathbb{C} = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}, (x,y) \mapsto y \quad \text{und} \quad \varphi_2 \colon U_2 \to \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}, (w,z) \mapsto \frac{1}{z}$$

sich zu einer holomorphen Abbildung $\varphi = y \colon X \to \mathbb{P}^1$ verkleben.

Folgern Sie, dass X kompakt ist und bestimmen Sie $g(X)$.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{div} \mathrm{d}y$.

(c) Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}y}{x^2}, \frac{\mathrm{d}y}{x^3}$ und $y\frac{\mathrm{d}y}{x^3}$ eine Basis von $\mathrm{H}^0(X, \Omega_X)$ bilden.

(d) Zeigen Sie, dass $\alpha \colon (x,y) \mapsto (\mathrm{i}x, y), (w,z) \mapsto (\mathrm{i}w, z)$ ein Automorphismus von X ist.

Bestimmen Sie die Fixpunkte von α, sowie $g(X/\alpha)$ und $g(X/\alpha^2)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X eine Riemannsche Fläche und D, D' Divisoren auf X.

(a) Zeigen Sie: Für alle $p \in P$ ist

$$\mathcal{O}_X(D + D')_p \cong \mathcal{O}_X(D)_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \mathcal{O}_X(D')_p.$$

(b) Geben Sie ein Beispiel an, wo $\mathcal{O}_X(D + D')(X) \ncong \mathcal{O}_X(D)(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(D')(X)$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $\Omega_X^{\otimes q}$ die Garbe der q-Differentiale auf X.

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{H}^0(X, \Omega_X^{\otimes q}) \cong \mathcal{L}(qK)$.

(b) Bestimmen Sie $\ell(qK)$.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 24. Januar**.