Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2017/18
18. Oktober 2017

Riemannsche Flächen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $S^2 \coloneqq \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$. Weiterhin bezeichnen wir den *Nordpol* mit $N \coloneqq (0,0,1)$ und den *Südpol* mit $S \coloneqq (0,0,-1)$. Zu diesen definieren wir die *stereographischen Projektionen*

$$\phi_N \colon S^2 \setminus N \to \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \phi_S \colon S^2 \setminus S \to \mathbb{R}^2$$

durch folgende Vorschrift: Zu $P \in S^2 \setminus N$ gibt es genau eine Gerade g durch P und N; wir setzen $(a,b,0) \coloneqq \{z=0\} \cap g$ und definieren $\phi_N(P) \coloneqq (a,b)$. Die Abbildung ϕ_S sei analog definiert.

Zeigen Sie, dass, nach geeigneten Identifikationen von $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$, die Karten $(S^2 \setminus N, \phi_N)$ und $(S^2 \setminus S, \phi_S)$ einen komplexen Atlas von S^2 bilden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \coloneqq \{a+\mathrm{i}b : a,b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ das *Gauß'sche Gitter*. Bestimmen Sie das asymptotische Wachstum der Gitterpunkte in einem Kreis $B_0(r)$ von Radius r um $0 \in \mathbb{C}$, d.h. geben Sie ein Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ an, so dass

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\#\{\mathbb{Z}[i] \cap B_0(r)\}}{f(r)} = 1.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Wir betrachten den quadratischen Torus als Quotienten $\pi \colon \mathbb{C} \to T \coloneqq \mathbb{C}/\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Weiterhin betrachten wir den zu einem Winkel $0 \le \theta < 2\pi$ gehörigen Strahl $S_\theta \coloneqq \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} : r \in \mathbb{R}_{\ge 0}\} \subset \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\tan\theta$ genau dann rational (d.h. in $\mathbb{Q}$) ist, wenn $\pi(S_\theta)$ geschlossen ist, d.h. falls es ein $r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass $\pi(r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \pi(0)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\pi(S_\theta)$ andernfalls dicht liegt, d.h. dass es zu jedem $z \in \mathbb{C}$ und zu jeder offenen Umgebung $z \in U_z \subseteq \mathbb{C}$ ein $r_z \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass $\pi(r_z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \in \pi(U_z)$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie den *Dirichlet'schen Approximationssatz*: Für eine irrationale Zahl $x \in \mathbb{R}$ liegt die Folge $\{\{nx\} : n \in \mathbb{N}\}$ dicht im Einheitsintervall. Dabei bezeichnet $\{x\} \coloneqq x - \lfloor x \rfloor$ den gebrochenen Anteil von x.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 25. Oktober**.