Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
21. Juni 2017

Modulformen
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei $f\colon \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Quasimodulform von Gewicht k und Tiefe p für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Beweisen Sie, dass die zugehörigen $f_i\colon \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ Quasimodulformen von Gewicht $k-2i$ und Tiefe $p-i$ sind.

(b) Seien

$$\delta : \mathrm{Q}M \to \mathrm{Q}M, \quad f \mapsto f_1,$$

und $E = \oplus E_k$, wobei

$$E_k : \mathrm{Q}M_k \to \mathrm{Q}M_k, \quad f \mapsto kf.$$

Zeigen Sie, dass $f_i = \delta^i f / i!$ und dass folgende Identitäten erfüllt sind:

$$[E, D] = 2D, \quad [E, \delta] = -2\delta, \quad [D, \delta] = E.$$

Dabei bezeichnet $[\cdot, \cdot]$ den Kommutator.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass:

$$\mathrm{Q}M_k^{(\leq p)} = \begin{cases} \oplus_{r=0}^{p} D^r(M_{k-2r}), & \text{falls} \quad p < k/2 \\ \oplus_{r=0}^{p} D^r(M_{k-2r}) \oplus \mathbb{C} \cdot D^{k/2-1} E_2, & \text{falls} \quad p \geq k/2 \end{cases}$$

für alle geraden k.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 5. Juli**.