Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
7. Juni 2017

Modulformen
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei $g(z) = \dfrac{1}{z} + z$ für $z \in K_{0,\infty}$. Berechne g^+ und g^-.

(b) Sei $g(z) = \dfrac{z}{1+z^2}$ für $0 < |z - \mathrm{i}| < 2$.

Wie sieht die Laurent-Entwicklung von g um i aus?

Welche Polordnung hat g bei i?

Hinweis: Partialbruchzerlegung und geometrische Reihe.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $M_k^{\mathbb{Z}} \subset M_k$ die ganzen Modulformen, deren Fourier-Koeffizienten alle ganzzahlig sind, d.h.

$$f(\tau) = \sum_{d \geq 0} a_d q^d \quad \text{mit} \quad a_d \in \mathbb{Z}\ \forall d.$$

Wir nennen $f \in M_k^{\mathbb{Z}}$ *normiert*, falls $a_0 = 1$.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die normierte Diskriminante $\Delta^* = (2\pi)^{-12}\Delta$ in $M_{12}^{\mathbb{Z}}$ liegt und normiert ist.

Zeige: Für jedes $k \geq 12$ und für jedes normierte $g \in M_k^{\mathbb{Z}}$ gilt

$$M_k^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cdot g \oplus M_{k-12}^{\mathbb{Z}} \cdot \Delta^*, \quad \text{wobei} \quad M_0^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad M_2^{\mathbb{Z}} = \{0\} \quad \text{sind.}$$

Zeige außerdem: $M_k^{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} = M_k$.

Insbesondere gilt für alle k: $\operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} M_k^{\mathbb{Z}} = \dim_{\mathbb{C}} M_k$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Wir lassen $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch Möbiustransformationen auf $\mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ operieren. Sei Γ_∞ der Stabilisator von ∞. Zeige: Für $k \geq 4$ gerade ist

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2\zeta(k)} G_k = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} 1|_k \gamma(\tau),$$

wobei die Summe über die Rechtsnebenklassen von Γ_∞ in Γ läuft.

Hinweis: Bestimmen Sie die Bahn $\Gamma \cdot \infty$ von ∞, den Stabilisator Γ_∞ und die Fourier-entwicklung von E_k.

(b) Wir kennen die Gruppen $\Gamma[n] = \mathrm{Kern}(\Gamma \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) \lhd \Gamma$. Sei $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f|_k\gamma = f$ für alle $\gamma \in \Gamma[n]$ für festes $n > 1$. Wir nennen f eine *Modulform von Gewicht k zur Kongruenzgruppe* $\Gamma[n]$, falls zusätzlich $f|_k\gamma$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ auf $\{\Im\tau > C\}$ für ein $C > 0$ beschränkt ist.

Zeige: $E_k^\infty[2] = \sum_{\gamma \in \Gamma[2]_\infty \backslash \Gamma[2]} 1|_k\gamma$ ist eine Modulform von Gewicht k für $\Gamma[2]$.

Hinweis: Bestimmen Sie ein Vertretersystem der Bahnen der Operation von $\Gamma[2]$ auf $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, den Stabilisator $\Gamma[2]_\infty$ und eine Fourierentwicklung von $E_k^\infty[2]$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $1 < N \in \mathbb{N}$ und $k \geq 4$ gerade. Zu einem Zeilenvektor $v \in \mathbb{Z}^2$, dessen Bild $\overline{v} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ von Ordnung N ist, definieren wir (für $\tau \in \mathbb{H}$)

$$E_k^{\overline{v}}(\tau) = \varepsilon_N \sum (c\tau + d)^{-k},$$

wobei über teilerfremde $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ mit $(c, d) \equiv v \bmod N$ summiert wird und $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ und $\varepsilon_N = 1$ für $N > 2$ ist.

(a) Zeige: $E_k^{\overline{v}} \in M_k(\Gamma[N])$.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für alle $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Gleichheit

$$\big(E_k^{\overline{v}}|_k\gamma\big)(\tau) = E_k^{\overline{v\gamma}}(\tau)$$

gilt. Dabei bezeichnet $\bar{\cdot}$ die kanonische Projektion mod N.

(b) Sei nun $N = 2$. Zeige: Für $\overline{v} = \overline{(0, 1)}$ ist

$$\lim_{\tau \to \infty} E_k^{\overline{v}} = 1$$

und der Grenzwert ist 0 für alle anderen gültigen Wahlen von $\overline{v}$.

(c) Für $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\gamma \cdot \infty = 0$ und f eine Modulform vom Gewicht k zu $\Gamma[2]$ sagen wir, dass f *bei der Spitze* 0 *verschwindet*, falls

$$\lim_{\tau \to \infty} \big(f|_k\gamma\big)(\tau) = 0.$$

Analog sei das Verschwinden bei anderen Spitzen definiert.

Sei nun $\overline{v} = \overline{(1, 0)}$ und $\gamma \cdot \infty = 0$.

Zeige: $\lim_{\tau \to \infty} \big(E_k^{\overline{v}}|_k\gamma\big)(\tau) = 1$ und für zulässige $\overline{w} \neq \overline{v}$ verschwindet $E_k^{\overline{w}}$ bei 0.

Was passiert im Fall $\tau \to 1$?

Folgere, dass $E_k^{\overline{(1,0)}}$, $E_k^{\overline{(0,1)}}$ und $E_k^{\overline{(1,1)}}$ linear unabhängig sind.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 21. Juni**.