Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
24. Mai 2017

Modulformen
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Seien die Polynome $B_n(x)$ definiert durch

$$\frac{t\mathrm{e}^{xt}}{\mathrm{e}^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Sie heißen Bernoulli-Polynome. Beweisen Sie:

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{1+m} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m+1}{j} B_j n^{m+1-j}$$

wobei $B_1 = \frac{1}{2}$ und $B_n := B_n(0)$ für $n > 1$ die Bernoulli-Zahlen sind.

(b) Zeigen Sie: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_k \pi^{2k}.$$

Dabei ist $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$, die Riemannsche Zetafunktion.

Hinweis: Zeigen Sie: $z \cot z = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{2^{2k} z^{2k}}{(2k)!} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Für $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $\pi_n \colon \Gamma \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ die kanonische Projektion. Wir nennen $\Gamma[n] = \mathrm{Kern}\, \pi_n$ die *Hauptkongruenzgruppe* (mod n).
Zeigen Sie: π_n ist surjektiv und somit ist $\Gamma[n]$ stets ein Normalteiler von endlichem Index.

Hinweis: Zeige zunächst: Für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $c \neq 0$ und $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 1$ gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$, so dass $\mathrm{ggT}(a + xb, c) = 1$.

(b) Zeigen Sie : Für $N \in \mathbb{N}$ ist

$$\sharp\, \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = N^3 \prod \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

wobei das Produkt über alle Primteiler p von N läuft.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für jede Primzahl p und $e \in \mathbb{N}$

$$\sharp\, \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}) = p^{3e} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

gilt.

(c) Seien

$$\Gamma_0[N] := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod N \right\}$$

und

$$\Gamma_1[N] := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\colon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod N \right\}.$$

Zeigen Sie: $\Gamma_0[N]/\Gamma_1[N] \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ und $\Gamma_1[N]/\Gamma[N] \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Hinweis: Wählen Sie eine Projektion auf eine geeignete Koordinate.

(d) Zeige: Für den Index von $\Gamma_0[N]$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0[N]] = N \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

wobei p die Primteiler von N durchläuft.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Wir betrachten nun die eingeschränkte Operation von $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$. Sei

$$\overline{F} = \{\tau \in \mathbb{H}\colon |\tau| \geq 1 \text{ und } |\operatorname{Re}\tau| \leq \tfrac{1}{2}\}$$

der Abschluss des aus der Vorlesung bekannten Fundamentalbereichs. Sei zudem $\rho = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/6}$.

Zeigen Sie: Für alle $\tau \in \overline{F} \setminus \{\mathrm{i}, \rho, \rho^2\}$ gilt für den Stabilisator: $\Gamma_\tau = \{\pm 1\}$.

(b) Zeigen Sie: Für $n \geq 2$ operiert $\Gamma[n]$ fixpunktfrei auf $\mathbb{H}$, d.h. für alle $\tau \in \mathbb{H}$ ist $\Gamma[n]_\tau = \{\pm 1\}$ für $n = 2$ und sogar trivial für $n > 2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir nennen $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ parabolisch, wenn A zu $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ konjugiert ist.

(a) Ist $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ parabolisch, dann erzeugt A eine unendliche Untergruppe, deren nichttriviale Elemente parabolisch sind.

(b) Wenn $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ parabolisch ist, dann besitzt A keine Fixpunkte in $\mathbb{H}$ und einen eindeutigen Fixpunkt auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(c) Sei $\Gamma \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ eine diskrete Untergruppe. Ein *parabolischer Punkt* von Γ ist ein Fixpunkt eines parabolischen Elements $A \in \Gamma$.
Seien Γ und Γ' diskrete Untergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Wir nennen Γ und Γ' kommensurabel, wenn $\Gamma \cap \Gamma'$ endlichen Index in beiden hat.

Seien Γ und Γ' kommensurabel. Zeigen Sie, dass Γ und Γ' die gleichen parabolischen Punkte besitzen.

(d) Bestimmen Sie die Menge der parabolischen Punkte von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 7. Juni**.