Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
10. Mai 2017

Modulformen
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeige: $\wp$ erfüllt die Differentialgleichung

$$\left(\wp'(z)\right)^2 = 4\wp^3(z) - 60G_4\wp(z) - 140G_6.$$

Hinweis: Zeige, dass die Differenz beider Seiten holomorph und periodisch ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ die Projektion. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}/\Lambda &\longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} = \left(\mathbb{C}^3 - \{0\}\right)/\mathbb{C}^* \\ t = \pi(z) &\longmapsto \begin{cases} (\wp(z) : \wp'(z) : 1), & \text{wenn } z \notin \Lambda \\ (0 : 1 : 0), & \text{wenn } z \in \Lambda \end{cases} \end{aligned}$$

injektiv ist und das Bild

$$E := \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \colon y^2 z = 4x^3 - 60G_4 xz^2 - 140G_6 z^2\}$$

besitzt. Zeigen Sie außerdem, dass die Jacobische $\mathrm{J}_\phi(t)$ von ϕ in jedem $t \in \mathbb{C}/\Lambda$ ungleich null ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei f eine elliptische Funktion mit $\mathrm{Per}(f) = \Lambda$ und $F \subset \mathbb{C}$ eine Fundamentalmasche für Λ. Beweisen Sie, dass

$$\sum_{z \in F} \mathrm{ord}_z(f) \cdot z \in \Lambda.$$

(b) Seien ϕ und E wie in Aufgabe 2. Wir definieren eine Gruppenstruktur auf $E \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, durch

$$P + Q := \phi(\pi(z_1 + z_2)), \quad P = \phi(\pi(z_1)),\ Q = \phi(\pi(z_2)).$$

Sei $l = \{(x : y : z) : ax + by + cz = 0\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ eine Gerade und $l \cap E = \{P, Q, R\}$ mit P, Q, R nicht-notwendigerweise verschieden. Beweisen Sie, dass

$$P + Q + R = 0.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Erinnere dich an den Kotangens:

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}.$$

Zeige: Er besitzt (für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$) eine Partialbruchzerlegung

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right).$$

Hinweis: Betrachte für festes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ die Funktion

$$f(w) = \frac{z}{w(z-w)} \pi \cot(\pi w).$$

Zeige, dass f als Singularitäten nur Pole 1. und 2. Ordnung besitzt und außerhalb von $\{z\} \cup \mathbb{Z}$ holomorph ist. Betrachte dann für ein geeignetes Quadrat $Q \subset \mathbb{C}$ (dessen Rand keine Singularitäten von f enthält!) das Wegintegral von f und zeige

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial Q} f(\zeta) \mathrm{d}\zeta = -\pi \cot(\pi z) + \frac{1}{z} + \sum_{0 < |n| \leq N} \frac{z}{n(z-n)}$$

für geeignetes $N \in \mathbb{N}$.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 24. Mai**.