Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
26. April 2017

Modulformen
Prof. Dr. Martin Möller
Matteo Costantini

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $\Lambda = \mathbb{Z}b_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}b_n \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter in $\mathbb{R}^n$.

(a) Beweisen Sie, dass das euklidische Volumen der Fundamentalmasche $F(b_1, \ldots, b_n) = \{x = \sum_{i=1}^n a_i b_i \in V : 0 \leq a_i \leq 1\}$ durch

$$\mathrm{vol}(F(b_1, \ldots, b_n)) = |\det([b_1| \cdots |b_n])|$$

gegeben ist. Hierbei sei das euklidische Volumen durch $\mathrm{vol}([0,1]^n) = 1$ normalisiert.

(b) Beweisen Sie, dass das Volumen der Fundamentalmasche unabhängig von der Gitter-Basiswahl ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Eine Linkswirkung einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X ist ein Abbildung

$$\phi : G \times X \to X$$

sodass $\phi(e, x) = x$ für alle $x \in X$ und $\phi(g \cdot h, x) = \phi(g, \phi(h, x))$ für alle $h, g \in G$ und $x \in X$.

Die Wirkung heißt:
- *Transitiv* wenn es für alle $x, y \in X$, ein $g \in G$ gibt, sodass $\phi(g, x) = y$.
- *Treu* wenn es für alle $g, h \in G$, ein $x \in X$ gibt, sodass $\phi(g, x) \neq \phi(h, x)$.
- *Frei* wenn für alle $x \in X$ gilt: $\{g \in G : \phi(g, x) = x\} = \{e\}$.

Sei $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}\}$. Beweisen Sie dass

(a) Die Abbildung

$$\phi : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) = \frac{az + b}{cz + d}$$

eine transitive, treue aber nicht freie Wirkung ist.

(b) Sei

$$\mathrm{Stab}(i) := \{A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) : \phi(A, i) = i\}$$

der Stabilisator von $i \in \mathbb{H}$. Beweisen Sie, dass

$$\mathrm{Stab}(i) = \mathrm{PSO}_2(\mathbb{R}),$$

wobei $\mathrm{PSO}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})/\{\pm Id\}$.

(c) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{PSO}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}, \quad A \cdot \mathrm{PSO}_2(\mathbb{R}) \mapsto \phi(A, i)$$

eine Homeomorphismus ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ eine diskrete Untergruppe mit $A_0 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$. Beweisen Sie, dass wenn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ mit $c \neq 0$, dann gilt $|c| \geq 1$.

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv definiert durch $A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $0 < |c| < 1$ und $A_{n+1} = A_n A_0 A_n^{-1}$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $g\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ unendlich oft stetig differenzierbar.

(a) Zeige: g besitzt eine *Fourier-Entwicklung*, d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(g) e^{2\pi i k x},$$

mit $c_k(g) = \int_0^1 g(t) e^{-2\pi i k t} \mathrm{d}t$, wobei diese Reihen gleichmäßig konvergieren.

Hinweis: Partielle Integration! Außerdem: Zeige, dass ohne Einschränkung $x = 0$ und $g(0) = 0$ angenommen werden können.

(b) Zeige, dass die Fourier-Koeffizienten eindeutig sind.

Genauer: Für $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ für die

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n x}$$

lokal gleichmäßig konvergiert gilt bereits $a_n = c_n(g)$ für alle n.

Hinweis: Gleichmäßige Konvergenz erlaubt das Vertauschen von Integration und Summation.

Abgabe bis Beginn der Übung um **14:00** am **Mittwoch, den 10. Mai**.