Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Sommersemester 2017
26. Juni 2017

Lineare Algebra L2/L5
Prof. Dr. Martin Möller
Jonathan Zachhuber

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei ein Dreieck $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ mit den Ecken $A = (1,2,3)$, $B = (1,0,1)$ und $C = (2,1,0)$.

Bestimmen Sie alle Seitenlängen und Winkel von Δ. Ist Δ rechtwinklig?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zu einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ definieren wir die *transponierte Matrix* $A^T = (a^T_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ durch $a^T_{ij} = a_{ji}$, für $i = 1,\dots,n$, $j = 1,\dots,m$ (Spiegeln an der Diagonalen).

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

sowie die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^T A y$.

Zeigen Sie, dass F genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist, wenn $b = c$, $a > 0$ und $ad - bc > 0$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V und $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm.

Zeigen Sie

(a) die Minkowski-Ungleichung: Für alle $x, y \in V$ gilt: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, sowie

(b) die Parallelogramm-Identität: Für alle $x, y \in V$ gilt: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben seien die Punkte $A = (3,0,0)$, $B = (1,2,3)$, $C = (2,-1,1)$ und $O = (0,0,0)$ im $\mathbb{R}^3$. Weiterhin bezeichnen wir mit E die Ebene durch B, C und O.

Bringen Sie E in Hesse'sche Normalform und berechnen Sie den Abstand von A zu E.

Abgabe bis **12:00** am **Freitag, den 7. Juli** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.